Lehrbuch

der

Arithmetik

für

Latein-, Real-, Bürger-

und

gewerbliche Fortbildungs-Schulen

von

Dr. Friedrich Ustrich,

Bürgerschuldirektor.

Zweite verbesserte und erweiterte Auflage.

München.

Verlag von Caesar Fritsch.

1884.

Vorrede.

Mit dem vorliegenden Leitfaden der Arithmetik, welcher den Zweck hat, das zeitraubende Diktieren zu vermeiden, glaube ich, die Grundzüge der Arithmetik als Unterrichtsgegenstand an humanistischen und technischen Lehranstalten in ein systematisches Ganze gebracht zu haben. Bei Abfassung desselben waren Weckung und Schärfung des Verstandes, dann Anwendung des Verstandenen die leitenden Gesichtspunkte und habe ich mein Augenmerk genau darauf gerichtet, allen mechanischen Gedächtniskram zu beseitigen, um die Schüler zum Denken, der Hauptaufgabe jedes Unterrichtes, anzuhalten. Ueberhaupt war ich von dem Gedanken beseelt, ein gründliches, den Geist anregendes und fruchttragendes Rechnen zu fördern. In wie weit ich Zweck und Absicht, etwas Notwendiges und Unentbehrliches zu schaffen, erreicht habe, überlasse ich getrost der geneigten Beurteilung meiner Herren Collegen mit der Erklärung, daß mir berichtigende Notizen zu meinem Buche stets willkommen sind und seiner Zeit die geeignete Berücksichtigung finden werden.

Arithmetik ist die Grundlage der gesammten Mathematik! Nur ihr richtiges Verständnis, nur ihr gründliches Wissen läßt mit Erfolg die Stufenleiter der verschiedenen mathematischen Zweige erklimmen. Dem Inhalte nach will mein Buch, das ein Sammelwerk ist, nichts Neues bieten, aber in Anordnung und Behandlung des Lehrstoffes, namentlich aber durch seine Kürze dürfte sich dieser Leitfaden von vielen andern, durch ihren Umfang für den Unterricht unpraktischen Lehrbüchern der Arithmetik zu seinem Vorteile unterscheiden.

Die als bestbekannten Werke von **Hofmann**, **Dr. Hauck**, **Dr. Schellen**, **Knieß & Bachmann**, **Findeisen**, **Haesters**, **Brenner**, **Immel**, **Rumbke**, **Schwager**, **Steck & Dr. Vielmayr**, **Dr. Kleinpaul** **rc.**, die musterhaft angelegten Scripten des königl. Gymnasialprofessors **Dr. Klein** und des königl. Rektors **Dr. Miller** waren meine Quellen; meine mehrjährige Lehr-

thätigkeit gab manch' trefflichen Wink. Daß die Beweise für die einzelnen Lehrsätze manchmal ausführlicher, manchmal nur andeutungsweise gegeben sind, kann mir nicht zum Vorwurfe gemacht werden; denn einerseits wäre durch eine weitere Ausführung aller Beweise der Umfang des Buches allzusehr gewachsen, anderseits wird es dem Schüler leicht sein, aus den gegebenen Andeutungen bei geeigneter Nachhilfe des Lehrers die Beweise selbst auszuführen.

Nachdem ein anregender und wahrhaft fördernder Unterricht in der Arithmetik unbestritten die Lösung zahlreicher Aufgaben erfordert, so habe ich, einesteils für die Schüler der meiner Leitung unterstellten dreikursigen Privat-Bürgerschule dahier, anderenteils vielfach ausgesprochenen Wünschen entsprechend, mein Lehrbuch, welches durch höchste Entschließung des kgl. Staatsministeriums für Kirchen- und Schulangelegenheiten vom 20. Sept. 1874 E.-N. 5854 (Siehe K. M.-Bl. Nro. 1874 pag. 432) unter die gebilligten Lehrbücher aufgenommen wurde, umgearbeitet, verbessert und erweitert und jedem Kapitel passende Uebungsaufgaben beigefügt.

Um den Umfang des Buches nicht zu sehr auszudehnen, wurde die Anzahl der Beispiele namentlich im zweiten Teile soviel beschränkt, als es mir mit dem Zwecke eines Lehrbuches vereinbar schien, da der Lehrer beim Unterricht Beispiele nach Belieben hinzufügen kann.

Was die Anwendung der neuen deutschen Rechtschreibweise betrifft, habe ich mich möglichst bemüht, den Regeln der neu eingeführten Orthographie zu folgen. Nur manchmal habe ich in der Eile solche Wörter, welche einer fremden Sprache entstammen oder die durch die neuere Orthographie zu sehr entstellt werden, nach ihrer Abstammung geschrieben.

Möge mein Lehrbuch, das ich hiemit als Sammelwerk in der uneigennützigsten Absicht getrost in die Oeffentlichkeit schicke, eine wohlwollende Aufnahme finden und seinen Zweck in bestem Maße erfüllen!

München, im November 1883.

Dr. Friedrich Ustrich.

Inhalts-Verzeichnis.

Erster Teil.

Zweiter Teil.

Erster Teil.

Einleitung.

Arithmetik ist die Lehre von den Zahlen und Zahlenverbindungen.

Unter einer **Zahl** versteht man sowohl **die Einheit** (1), als auch eine **bestimmte Menge** von unter sich gleichen Einheiten, z. B. 5, 7 2c.

Zahlen heißen **unbenannt**, wenn die Art der Einheiten nicht näher bezeichnet ist, z. B. 4 Einheiten oder 4.

Zahlen heißen **benannt**, wenn die Art der Einheiten genauer bestimmt ist, z. B. 7 Einheiten von 7 Mark oder kurzweg 7 Mark.

Zahlen von **derselben Benennung** heißen **gleichartig**, z. B. 2 Mark und 5 Mark.

Zahlen von **ungleicher Benennung** heißen **ungleichartig**, z. B. 2 Mark und 5 Francs.

Aus bekannten oder gegebenen Zahlen durch gewisse Veränderung derselben (Operationen) andere unbekannte Zahlen aufsuchen, heißt **rechnen.**

1. Numerieren.

Unter **Numerieren** versteht man eine doppelte Verrichtung:

1) **jede in Ziffern gegebene Zahl auszusprechen,**
2) **jede ausgesprochene Zahl mit Ziffern zu schreiben.**

Um die Zahlen auszudrücken, hat man Wörter und Zeichen notwendig. Die Wörter nennt man **Zahlwörter**, die Zeichen **Zahlzeichen** oder **Ziffern.** Jede Ziffer hat einen **doppelten Wert** und zwar ihren **ursprünglichen Wert (Nominal- oder Nennwert)**, welcher die Menge der Einheiten ausdrückt und den **Lokal- oder Stellenwert,** der ihr vermöge ihrer Stellung zukommt.

Zur Ausfüllung unbesetzter Stellen bedient man sich der **Null** (0).

Vorhergehende Zahlen mit Einschluß der 0 reichen aus, um alle möglichen Zahlen auszudrücken.

Dieses auf der Zahl 10 beruhende System des Numerierens heißt das **dekadische System** (Decimalsystem).

Das dekadische System besteht in seiner Grundeigenschaft darin, daß **zehn Einheiten einer niederen Ordnung immer eine Einheit einer höheren Ordnung geben.**

Beispiele.

1) Leset folgende Zahlen:

15 8006 7006 50040 67830 9099 8011
286783 97367 5860312 17325613.

2) Schreibet folgende Zahlen mit Ziffern an:

Dreißig Tausend sechszehn; vierundvierzig Tausend achtzig; sechsundfünfzig Tausend drei Hundert sieben; zehn Tausend dreiundfünfzig; fünfzehn Millionen, fünf Hundert und vier; sieben Tausend neun Millionen, vierzig Tausend und drei.

Anmerkung. Um Gewandtheit und Sicherheit im Anschreiben und Lesen von Zahlen zu erzielen, möge der Lehrer noch weitere Beispiele in der oben angegebenen Weise seinen Schülern geben.

Die römischen Zahlen.

Die Römer, welche kein so wissenschaftlich gebildetes Zahlsystem wie wir hatten, bedienten sich zum Schreiben aller Zahlen von 1—1000 folgender Zahlzeichen, die sie ihrem **Alphabete** entnommen hatten.

I. = 1	XI. = 11	XXI. = 21	CC. = 200
II. = 2	XII. = 12	XXX. = 30	CCC. = 300
III. = 3	XIII. = 13	XL. = 40	CD. = 400
IV. = 4	XIV. = 14	L. = 50	D. = 500
V. = 5	XV. = 15	LX. = 60	DC. = 600
VI. = 6	XVI. = 16	LXX. = 70	DCC. = 700
VII. = 7	XVII. = 17	LXXX. = 80	M. = 1000
VIII. = 8	XVIII. = 18	XC. = 90	MI. = 1001
IX. = 9	XIX. = 19	C. = 100	VM. = 5000
X. = 10	XX. = 20	CI. = 101	XM. = 10000
			CM. = 100000

Hieraus ersieht man, daß man bei den römischen Ziffern eine **Vielheit** entweder durch **Addition** (Aneinanderreihung der einzelnen Einheiten), z. B. III = 3; CCC = 300; MM = 2000 oder durch **Subtraktion** gewinnt. Letzteres geschieht dadurch, daß man niedere Einheiten vor höhere stellt, z. B. IV = 4; IX = 9; XL = 40; XC = 90; CD = 400; CM = 900. Endlich gewinnt man eine **Vielheit** auch noch durch **Multiplikation**, z. B. VM = 5000; VIIM = 7000.

Die römischen Zahlzeichen finden jetzt nur mehr Anwendung auf Uhren, Ueberschriften, als Ordnungszahlen bei Regentennamen und bei anderen Einteilungen und öfters auch noch bei Jahreszahlen.

Die Griechen gebrauchten ihre Buchstaben als Zahlzeichen.

Beispiele.

1) Welche sieben große lateinische Buchstaben stellen die Zahlen: 1, 5, 10, 50, 100, 500 und 1000 dar und auf welche Weise werden größere und kleinere Zahlen bezeichnet?
2) Schreibet das laufende Jahr mit römischen Zahlzeichen!
3) Schreibet folgende Jahrzahlen mit römischen Zahlzeichen:

788	814	843	1190	1158	1180	1183
1347	1348	1806	1825	1848	1864	1871

4) Schreibet folgende Zahlen mit arabischen Ziffern:
   MDCLXXIX MDCCCLIX MDCCLXXVI MDCCCX
5) Leset folgende Inschrift, welche auf der Gedenktafel einer Kirche steht:

   Zum ersten Male geweiht
   d. XI. Sept. MDCIII.
   Durch Brand vernichtet
   d. V. Juli MDCCLIV.
   Wieder eingeweiht
   d. XXV. Aug. MDCCLVIII.

6) Enträtselt folgende Inschrift:
   Begonnen den X. Juni Ao. MDCXXXIV.
   Vollendet den XIX. Mai Ao. MDCXXXVI.
7) Drücket folgende Daten in arabischen Ziffern aus:
   Otto der Große von Wittelsbach wurde von Kaiser Friedrich Barbarossa am 16/IX. MCLXXX mit dem Herzogtume Bayern belehnt.

1*

Bayern wurde am 1/I. MDCCCVI ein Königreich.

König Maximilian I. von Bayern gab am 26/V. MDCCCXVIII seinem Volke eine Verfassung (Konstitution) und starb am 13/X. MDCCCXXV.

König Ludwig I. regierte vom 13/X. MDCCCXXV bis zum 20/III. MDCCCXLVIII.

König Max II. vom 20/III. MDCCCXLVIII bis zum 10/III. MDCCCLXIV.

Am 10/III. MDCCCLXIV bestieg Ludwig II. den bayerischen Königsthron.

2. Unbenannte ganze Zahlen.

Jede Zahl kann einer doppelten Veränderung unterworfen werden, der **Vermehrung** und **Verminderung**; erstere wird bewirkt durch **Addition** und **Multiplikation**, letztere durch **Subtraktion** und **Division**.

Wir unterscheiden demnach vier Grundrechnungsarten (species) nämlich: **Addition**, **Subtraktion**, **Multiplikation** und **Division**.

1. Addition.

Zwei oder mehrere Zahlen addieren heißt eine neue Zahl suchen, welche ebenso viele Einheiten enthält, als die gegebenen Zahlen zusammen.

Die Zahlen, welche addiert werden sollen, heißen **Summanden**, **Addenden** oder **Posten**, das Resultat der Addition heißt **Summe**. Das Zeichen der Addition ist ein stehendes Kreuz (+), und wird gelesen plus. Durch dieses Zeichen werden die **Summanden** und mit diesen durch das Gleichheitszeichen („=") die **Summe** verbunden.

5 + 7 (ausgesprochen 5 plus 7) = 12
formelle wirkliche

Summe.

5 und 7 sind die **Summanden**, **Addenden** oder **Posten**.

Anm. 1. In jeder Summe lassen sich die Summanden beliebig vertauschen. $5 + 7 + 6 + 3 = 3 + 6 + 7 + 5 = 21$.

Anm. 2. $8 + 0 = 8$.

Anm. 3. Bei der Addition von größeren Zahlen schreibt man die Zahlen gewöhnlich unter einander und zwar Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. z. B.

156 + 3781 + 19023 = 22960

oder

156
3781
19023
22960

Anm. Um den Lokal- oder Stellenwert der einzelnen Ziffern klar zu legen, kann die vorstehende Addition auch auf folgende Art ausgeführt werden.

156	
3781	
19023	
10000	Summe der Zehntausender.
12000	Summe der Tausender.
800	Summe der Hunderter.
150	Summe der Zehner.
10	Summe der Einer.
22960	Gesuchte Summe (Totalsumme).

Anm. Um die Richtigkeit der ausgeführten Addition zu controlieren, addiert man zur größeren Sicherheit die Summanden einmal aufwärts und einmal abwärts.

Fragen und Beispiele.

1) Was heißt addieren?
2) Wie heißen die zu addierenden Zahlen?
3) Welches ist das Zeichen der Addition?
4) Wie heißt das Ergebnis oder das Resultat der Addition?
5) Worin besteht die einfache Probe der Addition?
6) Addieret folgende Summanden:
   a) 7345 + 1589 + 9 + 500 + 9007 + 98 + 1114 =
   b) 125704 + 8097 + 98765 + 1234 + 9006 =
   c) 13579 + 86421 + 45678 + 743210 =
7) Führet folgende Additionen auf dreierlei Arten aus:
   a) 304978 + 9975419 + 98765432 + 89001 + 7 + 14 + 979658 =
   b) 745362899 + 90049675 + 751421 + 876 + 8 + 10 + 5165979 + 65945138 =

8) Wie groß ist die Summe von folgenden Summanden?
97 + 584936540 + 90007811 + 324 + 9 + 46 + 7803975 + 489253 + 4782 =

9) Summieret:
3737 + 1099 + 5091 + 489 + 1374 + 2609 + 1108 + 3563 + 611 + 792 + 2526 + 2001 =

10) 483256 + 358767 + 197689 + 546876 + 260518 + 315961 + 507897 + 488689 + 1564313 + 504689 + 387067 + 132108 + 507889.

11) Wie heißt die Summe der folgenden Summanden?
a) 111, 723, 889 und 277.
b) 931, 1090, 50000, 910 und 69.
c) 3285, 4992, 1864, 8136, 5008, 6715 und 10000.

12) Welche Zahl ist um 314 größer als 899686?

13) Welche Zahl ist um 1358 größer als die Summe der Zahlen 902 und 46800?

14) Zur Summe der Zahlen 13756 und 18927 soll die Summe von 2076 und 17843 addiert werden!

15) Welche Zahl übertrifft die Zahl 10835 um 276?

16) Zur Summe der Zahlen 67005 und 321080 soll die Summe der Zahlen 100378, 12037 und 500 addiert werden!

2. Subtraktion.

Von einer Zahl eine zweite Zahl subtrahieren heißt, bestimmen, wie viele Einheiten die eine mehr zählt, als die andere oder kurz, den Unterschied (die Differenz) zweier Zahlen suchen.

Zwei Zahlen subtrahieren heißt auch, eine dritte Zahl suchen, welche zur zweiten addiert die erste als Summe gibt.

Diejenige Zahl, welche vermindert, oder von der abgezogen werden soll, heißt **Minuend** oder **Vollzahl;** diejenige Zahl, welche abgezogen oder hinweggenommen werden soll, heißt **Subtrahend** oder **Abzugszahl.** Das Resultat der Subtraktion heißt **Unterschied, Rest** oder **Differenz.**

Minuend oder Subtrahend werden durch das Subtraktionszeichen (—), welches weniger oder minus gelesen wird unter sich und mit der Differenz durch das Gleichheitszeichen verbunden.

Z. B. Minuend — Subtrahend = Differenz
96 — 64 = 32

96 Minuend (Vollzahl)
64 Subtrahend (Abzugszahl)
32 Differenz (Rest oder Unterschied)

96 — 64 = 32
formelle reelle (wirkliche)
Differenz.

Anm. 8 — 0 = 8
8 — 8 = 0.

Wie bei der Addition von größeren Zahlen schreibt man auch bei der Subtraktion die Zahlen gewöhnlich unter einander und zwar Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter u. s. w. Ist an einer einzelnen Stelle der Minuend kleiner als der Subtrahend, so nimmt man von der nächst höheren Stelle und, wenn an dieser eine Null steht, von der zweit höheren u. s. f. eine Einheit herüber und zerlegt sie in Einheiten niedrigerer Ordnung. Z. B.

78100 Minuend	9489	Rechne 2 von 9 bleibt 7
69423 Subtrahend	— 1352	5 „ 8 „ 3
8677 Differenz	8137	3 „ 4 „ 1
		1 „ 9 „ 8

Probe der Addition und Subtraktion.

a) Die Probe der Addition ist die Subtraktion.

Die Regel lautet:

Man läßt einen beliebigen Summanden weg, addiert die übrigen Summanden, subtrahiert die zweite Summe (**Teilsumme**) von der ursprünglichen (**Hauptsumme**), so muß, wenn die Rechnung richtig ist, der weggelassene Summand als Differenz erscheinen.

Z. B. 12 + 18 + 24 + 36 = 90.

12
18
24
36
90 Totalsumme (Hauptsumme)
78 Partialsumme (Teilsumme)
12 Summand.

b) Die Probe der Subtraktion ist die Addition.

Die Regel der Subtraktion lautet:

1) Subtrahend + Differenz = Minuend

2) Minuend — Differenz = Subtrahend

also in dem Beispiele 9 — 2 = 7

	Differenz		Subtrahend		Minuend
1)	7	+	2	=	9
	Minuend		Differenz		Subtrahend
2)	9	—	7	=	2

Auf der Eigenschaft, daß Subtrahend plus Differenz gleich Minuend beruht das Subtraktionsverfahren durch Ergänzung oder das Subtrahieren ohne Borgen durch Daraufzählen. Man verfährt dabei wie bei uns der Detaillist, wenn er z. B. zur Bezahlung auf 65 Pf. eine Mark erhält und den Rest herausgeben soll. Er legt dann zuerst 5 Pf. hin und sagt: „Das sind 70 Pf." und legt nun noch 30 dazu.

Die Ausführung entspricht also ganz dem Verfahren der Probe, z. B.

9489	Man spricht:	„2	und	(7)	sind 9
— 1352		5	„	(3)	„ 8
8137		3	„	(1)	„ 4
		1	„	(8)	„ 9.

Während die in ( ) gesetzte Zahl gesprochen wird, schreibt man sie zugleich an ihre Stelle.

Anm. Dieses anscheinend schwierigere Verfahren ist sehr vorteilhaft, um später die Division rasch ausführen zu können.

Fragen und Beispiele.

1) Was heißt Subtrahieren?

2) Welche Zahl heißt Minuend, welche Subtrahend?

3) Wie heißt das Ergebnis oder Resultat der Subtraktion?

4) Welches ist das Zeichen der Subtraktion?

5) Wie findet man die Differenz, wenn der Minuend und der Subtrahend gegeben sind?

6) Wie findet man den Minuend, wenn Differenz und Subtrahend bekannt sind?

7) Wie wird der Subtrahend gefunden, wenn Minuend und Differenz gegeben sind?

8) Wie erprobt man durch Subtraktion die Richtigkeit einer Addition?
9) Wie vielerlei Proben kann man über eine Subtraktion anstellen und welches sind diese?
10) 72050763 — 87969
11) 1834906 — 827740
12) 50706481 — 39697845
13) 250300812 — 76125589
14) 700000 — 324586
15) Wie heißt die Differenz zwischen 286527 und 98619?
16) Welcher Minuend entspricht der Differenz 2719, wenn der Subtrahend 7381 ist?
17) Welcher Subtrahend entspricht der Differenz 38, wenn der Minuend 1000 ist?
18) Wenn die Summe zweier Zahlen 13579 und ein Summand 9753 ist, wie heißt der andere Summand?
19) Subtrahieret auf zwei Arten
 a) 58938 — 726 =
 b) 100058 — 47 =
 c) 1890056 — 30054 =
 d) 987654 — 456654 —
20) Bildet die Differenz oder den Unterschied von:
 a) 246913578 — 123456789 =
 b) 110022003300 — 6600550044 =
21) Um wieviel ist 903006 größer als 15078?
22) Um wieviel ist 530117 kleiner als 720132?
23) Welcher Minuend entspricht der Differenz 452719, wenn der Subtrahend 547281 ist?
24) Man soll die Differenz der Zahlen 905783 und 804977 um die Zahl 30806 vermindern?
25) Rechnet aus 987643 — 56789

3. Multiplikation.

Zwei Zahlen multiplicieren heißt, die eine so oft als Summand setzen, als die andere angibt, oder die eine so oft mal nehmen, als die andere Zahl Einheiten hat.

z. B. $7 . 4 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$.

Das Zeichen der Multiplikation ist entweder ein liegendes Kreuz (×) oder ein Punkt (.).

Hieraus ergibt sich, daß die Multiplikation eigentlich nur eine abgekürzte Addition von lauter gleichen Summanden oder Posten ist. Die Zahl, welche öfters als Summand gesetzt oder genommen werden soll, heißt **Multiplikand**; diejenige Zahl, welche angibt, wie oft der Multiplikand als Summand gesetzt oder genommen werden soll, heißt **Multiplikator.** Beide Zahlen **Multiplikand** und **Multiplikator** haben auch den gemeinsamen Namen **Faktoren.** Das **Resultat** der Multiplikation heißt **Produkt.**

Multiplikand und Multiplikator werden durch das Multiplikationszeichen (× oder .), welches mal gelesen wird, unter sich und mit dem Produkte durch das Gleichheitszeichen verbunden. z. B.

7 . 4 = 28

Faktoren

Multiplikand Multiplikator

7 . 4 = 28

formelles wirkliches

Produkt.

7 . 4 = 4 . 7. Hieraus folgt der Satz: **In jedem formellen Produkte lassen sich die Faktoren beliebig vertauschen.**

3217 . 612 =

	I. Art		II. Art	
	3217		3217	
	.612		.612	
Teilprodukt	6434	= 3217 . 2	1930200	= 3217 . 600
	3217	= 3217 . 10	32170	= 3217 . 10
	19302	= 3217 . 600	6434	= 3217 . 2
Hauptprodukt	1968804		1968804	

Einige Vorteile bei der Multiplikation.

1) Multiplikation mit einer Zahl, welche eine Eins

a) in der Einerstelle

b) in der höchsten Stelle hat.

In diesen beiden Fällen erspart man das nochmalige Niederschreiben der Ziffern des Multiplikanden.

a) 8 2 5 4 6 2 . 8 3 1
2 4 7 6 3 8 6
6 6 0 3 6 9 6
———————
6 8 5 9 5 8 9 2 2

b) 925436 . 183
7403488
2776308
─────────
169354788

2) Mit den nicht über 15 hinausliegenden Zahlen multipliciere man wie mit einstelligen.

z. B. 14806 . 12
─────────
177672

3) Die Multiplikation mit einer zwei- und dreizifferigen Zahl läßt sich unter Ersparung von Ziffern ausführen, wenn man eine solche Zahl in Faktoren zerlegen kann.

z. B. 325459 . 72 (= 9 . 8)
. 9
─────────
2929131
. 8
─────────
23433048

4) Mit 10, 100, 1000 u. s. w. multipliciert man, indem man dem Multiplikanden ebenso viel Nullen anfügt, als deren Multiplikator enthält.

z. B. 1752 . 1000 = 1752000

5) Ist eine Multiplikation mit 25 oder 125 auszuführen, so wird man mit 100 oder mit 1000 multiplicieren und das Produkt durch 4 oder 8 dividieren, weil man den Multiplikator 4 mal oder 8 mal so groß genommen hat, als er ist, denn 25 ist der vierte Teil von Hundert, 125 der achte Teil von Tausend ꝛc. ꝛc.

z. B. 168 . 25 = 16800 : 4 = 4200
1296 . 125 = 1296000 : 8 = 162000.

6) Besteht der Multiplikator aus einer Zahl, welche den Zahlen 100, 1000, 10000 u. s. w. nahe liegt, so multipliciere man mit diesen Zahlen und subtrahiere das Produkt aus dem Multiplikanden und der fehlenden Zahl.

854325 . 998 = 854325 . 1000 = 854325000
— 854325 . 2 —1708650
─────────
852616350

7) Multiplikation mit 11.

Man schreibe die Einer des Multiplikanden als Einer des Produkts an und addiere dann die Einer zu den Zehnern, die Zehner zu den

Hundertern 2c. Schließlich schreibt man die letzte oder höchste Stelle wieder allein an, falls nicht noch 1 hinüber zu zählen ist.

z. B. 33 . 11 = 363
55 . 11 = 605
54236 . 11 = 596596
78956 . 11 = 868516.

Ein verkürzter Ausdruck der Multiplikation ist das **Potenzieren.**

Unter einer **Potenz** versteht man ein **Produkt aus lauter gleichen Faktoren.** z. B. $5^3 = 5 . 5 . 5 = 125$
$7^4 = 7 . 7 . 7 . 7 = 2401$

In der Potenz 7^4 (gesprochen 7 zur 4. Potenz oder 7 hoch ^{4}) heißt 7 **die Grundzahl (Basis),** 4 **der Exponent.**

Die Grundzahl oder Basis ist jene Zahl, welche mit sich selbst multipliciert werden soll.

Der Exponent ist jene Zahl, welche angibt, wie oft die Grundzahl mit sich selbst multipliciert werden soll.

Anm. Basis und Exponent lassen sich nicht miteinander vertauschen.
$7^4 = 2401$
$4^7 = 16384$

Fragen und Beispiele.

1) Was heißt multiplicieren?
2) Was ist eigentlich die Multiplikation?
3) Welche Zahl heißt Multiplikand und welche Multiplikator und welchen gemeinsamen Namen führen diese beiden Zahlen und warum?
4) Wie heißt das Ergebnis oder Resultat der Multiplikation?
5) Welches ist das Zeichen der Multiplikation und wie wird dasselbe gelesen?
6) Auf welche Weise wird eine Zahl mit 10, 100, 1000 2c. 2c. multipliciert?
7) Auf wievielerlei Weise kann man eine Multiplikation schriftlich ausführen?
8) Wie kann man mit 11 rasch multiplicieren?
9) Führet auf zweierlei Art folgende Multiplikationen aus!
   a) 12379 247
   b) 328 . 4067
   c) 67809345 . 5936

d) 84597 . 920
e) 7849 . 206
f) 139875 . 2368

10) Rechnet auf die kürzeste Weise aus:
a) 678097 + 678097 + 678097 + 678097 + 678097 =
b) 780493 + 780493 + 780493 — 729 — 729 — 729 — 729 =
c) 780463 + 12345 + 780463 + 12345 + 780463 + 12345 =

11) (6 + 11 + 15) . 5 =

12) Welches Multiplikationsgesetz läßt sich aus Nr. 11 ableiten für den Fall, daß einer der Faktoren aus zwei oder mehreren Summanden besteht?

13) (1000 — 6) . 7 =

14) Welches Multiplikationsgesetz läßt sich aus Nr. 13 ableiten?

15) (7 . 5) . 6 =

16) 7 . (8 . 4) =

17) Welches Multiplikationsgesetz läßt sich aus Nr. 15 und Nr. 16 ableiten?

18) Wie heißt das Produkt der Faktoren 1235789 und 400708?

19) Was erhält man, wenn man 1790 zu sich selbst 725 mal addiert?

20) Welche Zahl ist 11 mal so groß als 123456709?

4. Division.

Dividieren oder teilen heißt, suchen, wieviel mal eine gegebene Zahl in einer andern enthalten ist oder wie oft eine Zahl von einer andern hinweggenommen werden kann.

Die Division ist daher eigentlich eine abgekürzte Subtraktion, d. i. ein wiederholtes Subtrahieren mit gleichen Subtrahenden. Die Zahl, welche dividiert oder geteilt werden soll, heißt **Dividend oder Teilungszahl**, die Zahl, mit welcher dividiert oder geteilt wird, heißt **Divisor oder Teiler** und endlich das Ergebnis oder Resultat der Division heißt **Quotient oder Teil.** Dividend und Divisor werden durch das Divisionszeichen („ : ") (gesprochen „dividiert

durch") unter sich und durch das Gleichheitszeichen „ = " mit dem Quotienten verbunden.

z. B. 28 : 7 = 4 d. h. der 7. Teil von 28 = 4 oder 7 ist in 28 4 mal enthalten oder die Zahl 7 kann man 4 mal von der Zahl 28 wegnehmen oder subtrahieren.

z. B. 28 — 7 — 7 — 7 — 7 = 0.

Zwei Zahlen dividieren heißt auch, eine dritte neue Zahl suchen, welche mit der zweiten multipliciert die erste als Produkt gibt.

Dividend	Divisor	Quotient
28 :	4 =	7

formeller — wirklicher
Quotient.

Man dividiert die höchste Stelle des Dividenden durch den Divisor, multipliciert den erhaltenen Teilquotienten mit dem Divisor, subtrahiert das Produkt vom Dividenden und verfährt mit dem bleibenden Reste ebenso, bis entweder die Division aufgeht oder ein Rest bleibt, der kleiner ist als der Divisor. Der Quotient ist also die Summe aus den einzelnen Teilquotienten.

$$
\begin{array}{r}
42504804 : 1854 = 20000 + 2000 + 900 + 20 + 6 \\
= 22926 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
42504804 \\
37080000 \\
\hline
5424804 \\
3708000 \\
\hline
1716804 \\
1668600 \\
\hline
48204 \\
37080 \\
\hline
11124 \\
11124 \\
\hline
— —
\end{array}
$$

Läßt man die Nullen weg, so braucht man blos vom Dividenden immer eine weitere Stelle herabzunehmen, während man im Quotienten jede folgende Ziffer um eine Stelle weiter nach rechts setzt. Auf diese Weise entspricht der Lokalwert den Ziffern des Quotienten dem der entsprechenden Ziffern des Dividenden.

Dividend : Divisor = Quotient.
42504804 : 1854 = 22926
3708
5424
3708
17168
16686
4820
3708
11124
11124
— —

Eine bedeutende Abkürzung gewährt das bereits früher angeführte Subtraktionsverfahren durch Ergänzung.

Man subtrahiert nämlich das Produkt aus dem Teilquotienten und dem Divisor, ohne dasselbe niederzuschreiben, wodurch man natürlich mit der Hälfte der sonst nötigen Ziffern ausreicht.

z. B. 42504804 : 1854 = 22926
5424
17168
4820
11124

Anm. Mündlich wird vorstehende Aufgabe auf folgende Weise gerechnet: 2 mal 4 ist 8 und (2) ist 10, bleibt 1; 2 mal 5 ist 10 und 1 ist 11 und (4) ist 15, bleibt 1; 2 mal 8 ist 16 und 1 ist 17 und 5 ist 22, bleibt 2; 2 mal 1 ist 2 und 2 ist 4 und (0) ist 4. Ganz auf dieselbe Weise verfährt man mit den weiteren Teilquotienten. Die mit ( ) bezeichneten Ziffern müssen als Rest angeschrieben werden, während das Uebrige nur gesprochen wird.

Probe der Multiplikation und Division.

Die Probe der Multiplikation ist die Division.

Der hiefür geltende Lehrsatz lautet:

Produkt dividiert durch den Multiplikanden gibt den Multiplikator, und Produkt dividiert durch den Multiplikator gibt den Multiplikanden oder kurz Produkt dividiert durch den einen Faktor gibt den andern Faktor.

z. B. Multiplikand Multiplikator Produkt

$120 \quad . \quad 30 = 3600$

1) a) $\frac{\text{Produkt}}{\text{Multiplikator}} = \text{Multiplikand}$

$\frac{3600}{30} = 120$

b) $\frac{\text{Produkt}}{\text{Multiplikand}} = \text{Multiplikator}$

$\frac{3600}{120} = 30$

2) $\frac{\text{Produkt}}{\text{der eine Faktor}} = \text{der andere Faktor}$

Die Probe der Division ist die Multiplikation.

Die Regel lautet:

Divisor . Quotient = Dividend.

z. B. Dividend Divisor Quotient

$28 : 4 = 7$

Probe. Divisor . Quotient = Dividend

$4 \quad . \quad 7 = 28$

Bleibt bei der Division ein Rest, so lautet die Regel:

Divisor . Quotient + Rest = Dividend.

Dividend Divisor Quotient

z. B. $51 : 12 = 4$

Probe. Divisor . Quotient + Rest = Dividend

$12 \quad . \quad 4 + 3 = 51$

Eine Zahl wird durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividiert, indem man von der Zahl soviele Stellen abstreicht, als der Divisor Nullen hat. Die abgestrichenen Stellen des Dividenden bilden den Rest der Division.

Z. B. 927 : 10

Quot. 92 | 7 Rest

9536 : 100

Quot. 95 | 36 Rest

1279458 : 1000

Quot. 1279 | 458 Rest.

Durch 5 wird eine Zahl dividiert, indem man die Zahl mit 2 multipliciert und das Produkt durch 10 dividiert.

7395 : 5 = (7395 . 2) : 10 = 14790 : 10 = 1479

Durch 25 wird eine Zahl dividiert, indem man die Zahl mit 4 multipliciert und das Produkt durch 100 dividiert.

9000 : 25 = (9000 . 4) : 100 = 36000 : 100 = 360

Durch 125 wird eine Zahl dividiert, indem man die Zahl mit 8 multipliciert und das Produkt durch 1000 dividiert.

111000 : 125 = (111000 . 8) : 1000 = 888000 : 1000 = 888.

Fragen und Beispiele.

1) Was heißt dividieren?
2) Als was erscheint sonach die Division?
3) Welche Zahl heißt Dividend, welche Divisor und welche Quotient?
4) Welches ist das Zeichen der Division und wie wird dasselbe gelesen?
5) Auf welche Weise wird eine Zahl durch 10, 100, 1000 ꝛc. dividiert?
6) Welches sind die Proben der Multiplikation und der Division?
7) Wenn bei einer Division ein Rest bleibt, erhält man dann auch den Dividend durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor?
8) Wie macht man die Probe bei einer Division, die nicht aufgeht?
9) Welche Veränderung kann man mit dem Dividend und dem Divisor vornehmen, ohne daß der Quotient sich dadurch ändert? (Beispiel).
10) Wie wird eine Summe und wie eine Differenz durch eine Zahl dividiert? (Beispiel).
11) 38617524180 : 52835
12) 7183524600000 : 96813000
13) 25694683915617624 : 372572917
14) Wie heißt der Quotient aus 444444444 und 36?
15) Welches ist der 148ste Teil von 48988?

16) Das Produkt zweier Zahlen ist 51755461, der eine Faktor 5921, welches ist der andere Faktor?

17) Der Wert eines Quotienten ist 46380, wie heißt der Divisor, wenn der Dividend 368535480 ist?

18) Wie oft kann man 167 von 535068 subtrahieren?

19) Der Wert eines Quotienten ist 5642; wie heißt der Dividend, wenn der Divisor 32 ist?

20) Von der Summe der Zahlen 1254567987, 9400973421, 8690954 ziehet die Zahl 7479268614 ab und dividieret den Rest durch 5023; wie groß ist der Quotient?

5. Zahlenausdrücke.

Unter einem Zahlenausdruck versteht man die Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen durch irgend welche Operationszeichen der verschiedenen Rechnungsarten.

Man unterscheidet einfache und zusammengesetzte Zahlenausdrücke.

Die einfachen Zahlenausdrücke sind:

1) die Summe z. B. $5 + 9$
2) die Differenz z. B. $9 - 7$
3) das Produkt z. B. $7 \cdot 4$
4) der Quotient z. B. $28 : 4$

Die zusammengesetzten Zahlenausdrücke bestehen aus einer Vereinigung von einfachen Zahlenausdrücken.

Man unterscheidet Zahlenausdrücke der ersten Art, der zweiten Art und endlich der gemischten Art.

a) Zahlenausdrücke der ersten Art.

Sind mehrere Zahlenausdrücke durch die Zeichen + und —, also durch Addition und Subtraktion mit einander verbunden, so heißt man einen solchen Zahlenausdruck ein Aggregat (algebraische oder arithmetische Summe, Polynom).

Die einzelnen durch „plus" oder „minus" mit einander verbundenen Zahlen heißen Glieder des Aggregates und zwar die mit dem Vorzeichen + positive (additive) und die mit dem Vorzeichen — negative (subtraktive) Glieder des Aggregates.

Steht vor einem Gliede kein Zeichen, so ist dasselbe als positiv zu betrachten.

Die Reihenfolge der Glieder ist eine beliebige, nur ist zu bemerken, daß man die algebraische Summe wo möglich mit einem positiven Gliede beginnt.

Zahlenausdrücke innerhalb einer Klammer müssen zuerst berechnet werden.

$$17 - 9 + 5 + 8 - 2 - 6 + 11 - 7 =$$
$$8 + 5 + 8 - 2 - 6 + 11 - 7 =$$
$$13 + 8 - 2 - 6 + 11 - 7 =$$
$$21 - 2 - 6 + 11 - 7 =$$
$$19 - 6 + 11 - 7 =$$
$$13 + 11 - 7 =$$
$$24 - 7 =$$
$$17$$

Den Wert eines Aggregates findet man auch, wenn man von der Summe der positiven Glieder die Summe der negativen Glieder subtrahiert.

$$17 - 9 + 5 + 8 - 2 - 6 + 11 - 7 =$$
$$(17 + 5 + 8 + 11) - (9 + 2 + 6 + 7)$$
$$41 - 24 = 17.$$

Fragen und Beispiele.

1) Was versteht man unter einem Zahlenausdruck und wie teilt man die Zahlenausdrücke ein?

2) Was ist ein Aggregat?

3) Wie nennt man ein Aggregat noch?

4) Was versteht man unter positiven und negativen Gliedern eines Aggregates?

5) Wie findet man den Wert eines Aggregates?

6) Berechnet folgendes Aggregat:
$14 + 5 - 6 - 2 + 7 + 1 - 9 + 10$

7) $276 + 359 - 135 + 278 - 786 - 95 + 634 - 31$

8) $809 - 384 + 10 - 9 - 16 + 490$

9) $(4003 - 1896) - (4748 - 4912 - 716 + 1109)$

10) Was erhält man, wenn von der Summe der Zahlen 1096 und 784 die Differenz der Zahlen 18003 und 16123 subtrahiert wird?

11) $(237 - 118) - (57 + 28) + (13 - 6 - 2 + 1)$

12) $[237 - (118 - 57)] + [(28 + 13 - 6 - 2) + 1]$

b) Zahlenausdrücke der zweiten Art.

Sind die Glieder eines Zahlenausdruckes durch Multiplikation und Division verbunden, so nennt man diese Verbindung einen Zahlenausdruck der zweiten Art.

Ein solcher aus Faktoren und Divisoren bestehender Ausdruck heißt algebraisches Produkt oder Serie.

Die Reihenfolge, nach welcher multipliciert und dividiert wird, ist für die Berechnung eines algebraischen Produktes oder einer Serie ganz gleichgiltig.

z. B.

$$6 . 16 : 12 . 14 : 4 =$$
$$96 : 12 . 14 : 4 =$$
$$8 . 14 : 4 =$$
$$112 : 4 =$$
$$28$$

Den Wert eines algebraischen Produktes oder einer Serie findet man auch, wenn man das Produkt aller Faktoren durch das Produkt aller Divisoren dividiert.

z. B.

$$6 . 16 : 12 . 14 : 4 =$$
$$(6 . 16 . 14) : (12 . 4) =$$
$$1344 : 48 = 28$$

Fragen und Beispiele.

1) Was versteht man unter einem Zahlenausdruck der zweiten Art?

2) Wie wird ein Zahlenausdruck der zweiten Art noch genannt?

3) Wie findet man den Wert eines algebraischen Produktes oder einer Serie?

4) 5040 : 18 : 7 . 27 : 5 . 8

5) 3960 : 22 . 137 : 15 . 4

6) 407 : 8 : 121 . 56 : 74 : 35 . 66 . 23 : 69 . 15

7) 48 : 12 . 10 . 28 : 8 . 36 : 42 : 30 . 22

8) (32 . 14 . 36 . 50 . 24) : (12 . 48 . 30 . 14 . 8)

9) [168 : (210 : 10)] . [108 : (70 : 14) . 50 : 18]

10) [48 . (98 : 14)] : [336 : (6 . 2)].

c) Zahlenausdrücke der gemischten Art.

Wenn in einem Zahlenausdrucke alle vier Rechnungsarten (Species) enthalten sind, so nennt man eine solche Verbindung einen Zahlenausdruck der gemischten Art. Bei einem solchen Zahlen=

ausdruck ist die Reihenfolge der Operationen nicht gleichgiltig. Hier gilt die Regel, daß immer die Operationen der zweiten Art, also Multiplikation und Division den Vorrang vor den Operationen der ersten Art, also der Addition und Subtraktion haben. Soll aber doch eine Operation der ersten Art den Vorrang haben, so muß dies durch eine Klammer angezeigt werden. z. B.

a) $35 - 7 \,.\, 9 + 242 : 22 + 7 \,.\, 3 =$
$35 - 63 + 11 + 21 =$
$67 - 63 = 4$

b) $16 \,.\, (7 + 21 : 7) : 8 + 10 =$
$16 \,.\, (7 + 3) : 8 + 10 =$
$16 \,.\, 10 : 8 + 10 =$
$160 : 8 + 10 =$
$20 + 10 = \mathbf{30}$

c) $(17 + 24 : 8) : [7 - (11 + 31) : (14 - 12) + 3 \,.\, (19 - 39 : 3)] + 5 =$
$(17 - 3) : [7 - 42 : 2 + 3 \,.\, (19 - 13)] + 5 =$
$20 : [7 - 21 + 3 \,.\, 6] + 5 =$
$20 : [7 - 21 + 18] + 5 =$
$20 : 4 + 5 =$
$5 + 5 = 10.$

Fragen und Beispiele.

1) Was versteht man unter einem Ausdruck der gemischten Art?

2) Ist in einem solchen Ausdrucke die Reihenfolge der Operationen gleichgiltig?

3) In welcher Reihenfolge müssen bei einem Ausdrucke der gemischten Art die Operationen ausgeführt werden?

4) Wann wird von der regelmäßigen Reihenfolge der Operationen abgewichen?

5) $(1007 : 19 - 23 \,.\, 43 + 970) : (23 \,.\, 197 - 4560 + 2449 : 79)$

6) $(701 - 10897 : 17 + 7 \,.\, 9) : (11509 - 13 \,.\, 883 + 1023 : 93)$

7) $[(2625 : 35 + 52221 : 507) \,.\, 7 - 724] : 9 + 7 \,.\, 6$

8) (37 . 107 — 4579 : 19 + 4573 : 17 — 3983) . (131 . 37 — 13 . 379 — 14941 : 67 — 5759 . 13 — 40).
9) 247 — [(487 — (53874 : 738 + 11187 : 1017) : 14 + (57 . 57 — 63 . 48) : 45) . 18 + 1632] : 7
10) [52909 — (17 . 249 + 13763) : 44] : 28 + 125.

3. Die 4 Species mit benannten ganzen Zahlen.

Um benannte Zahlen vergleichen und verbinden zu können, muß man das Maß kennen, von dem ihre Benennung abgeleitet ist. Dieses Maß bezieht sich

1) **auf die bloße Anzahl der Dinge** (Stückmaß) z. B. Stück (Eier), Dutzend (Bleistifte), Ballen (Papier) u. s. w.;
2) **auf die räumliche Ausdehnung** und zwar
   a) auf die **Länge** (Längenmaß) Meter, Meilen 2c.;
   b) auf die **Fläche** (Flächenmaß) z. B. Quadratmeter, Ar, Hektar 2c.;
   c) auf den **körperlichen Inhalt** (Körpermaß) z. B. Kubikmeter, Ster, Liter 2c.;
3) **auf das Gewicht** z. B. Centner, Kilogramm, Pfund 2c.;
4) **auf den Preis** (Wertmaß) z. B. Mark, Francs;
5) **auf die Zeit** z. B. Jahr, Monat, Tag, Stunde, Minuten, Sekunden;
6) **auf den Winkel** (Winkelmaß) z. B. Grad, Minuten, Sekunden.

Zusammengehörige höhere und niedere Mehreinheiten werden gleichartig z. B. 1 Mk. 27 Pf., nicht zusammengehörige z. B. 4 Mk. und 7 Liter ungleichartige genannt.

Statt der benannten Zahl 150 Pfennige könnte man auch sagen 100 Pfennige und 50 Pfennige, oder, da 100 Pfennige soviel wie 1 Mark sind, auch 1 Mark 50 Pfennige. Hieraus folgt, daß 150 Pfennige = 1 Mk. 50 Pf. Deshalb unterscheidet man einfach benannte Zahlen, wenn eine Zahl nur durch eine Benennung dargestellt ist, dagegen mehrfach benannte Zahlen, wenn zum Ausdrucke einer Zahl mehrere Benennungen verwendet sind.

Das Verwandeln von Einheiten höherer Ordnung in Einheiten niederer Ordnung sowie umgekehrt das Verwandeln von Einheiten niederer Ordnung in Einheiten höherer Ordnung heißt reducieren.

Um eine Reduktion vornehmen zu können, ist es notwendig, daß man die Zahl kennt, welche angibt, wie viele Einheiten einer niedern Ordnung auf eine Einheit der nächst höheren Ordnung gehen. Diese Zahl wird Reduktionszahl genannt. So ist z. B. für die Einheiten Mark und Pfennige die Reduktionszahl 100, für Jahr und Monate 12, für Tage und Stunden 24 u. s. w.

Reduktionszahlen.

a) Einteilung der Maße, Gewichte und Münzen.

1. Stückmaße.

1 Groß = 12 Dutzend.
1 Dutzend = 12 Stück.
1 Schock = 4 Mandel = 60 Stück.
1 Mandel = 15 Stück.
1 Viertel (Eier, Aepfel u. s. w.) = 25 Stück.

Altes Papiermaß.

1 Ballen = 10 Rieß
1 Rieß = 20 Buch
1 Buch = 24 Bogen geleimt (Schreibpapier).
1 Buch = 25 Bogen ungeleimt (Druckpapier).

Neues Papiermaß.

1 Ballen = 10 Rieß.
1 Rieß = 10 Buch.
1 Buch = 10 Heft.
1 Heft = 10 Bogen.

Bll. = Ballen; Rs. = Rieß; Bch. = Buch; Bg. = Bogen; Grss. = Groß; Mdl. = Mandel; Dtz. Dutzend.

2. Längen-, Flächen- und Körpermaße.

In ganz Deutschland, in Frankreich, Italien, Belgien, Holland, in der Schweiz, in Griechenland, in Spanien und nunmehr auch in Oesterreich gilt das metrische Maß- und Gewichtssystem.

Die wesentlichen Vorzüge dieses auf ein Naturmaß (Meridianmessung) begründeten Systems liegen vor allem in der gemeinsamen Einheit für alle Maße und der allen gemeinsamen dekadischen Teilung ihrer Einheiten, dann der daraus folgenden Uebereinstimmung der Längen-, Flächen- und Körpermaße sowie in dem unmittelbaren Zusammenhang zwischen dem Raum-, Hohlmaß und Gewicht.

Die Benennung der Einheiten verschiedener Ordnung geschieht durch Vorsilben, indem den Einheiten niedrigerer Ordnung die aus dem Lateinischen abgeleiteten Wörter deci (decem 10), centi (centum 100) milli (mille 1000), den Einheiten höherer Ordnung aber die aus dem Griechischen abgeleiteten Wörter Deka (10fach), Hekto (100fach), Kilo (1000fach), Myria (10000fach), vorgesetzt werden.

Abgekürzte Bezeichnung der metrischen Maße.

a) Längenmaß

Kilometer = km
Meter = m
Decimeter dm
Centimeter = cm
Millimeter = mm

b) Flächenmaß

Quadratkilometer = qkm
Hektar = ha
Ar = a
Quadratmeter = qm
Quadratdecimeter = qdm
Quadratcentimeter = qcm
Quadratmillimeter = qmm

c) Körper- und Hohlmaße

Kubikmeter = cbm
Kubikdecimeter = cdm
Kubikcentimeter = ccm
Kubikmillimeter = cmm
Hektoliter = hl
Liter = l

Anm. Den Buchstaben werden Schlußpunkte nicht beigefügt.

a) Längenmaße.

Ueber die Längenmaße setzt die Maß- und Gewichtsordnung (Art 3) folgendes fest:

Die Einheit der Längenmaße bildet das oder der Meter oder der Stab, d. i. der vierzig millionste Teil des Erdmeridians oder der zehn millionste Teil des durch die Sternwarte von Paris gehenden Erdmeridians.

1 km = 1000 m
1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.
1 dm = 10 cm = 100 mm
1 cm = 10 mm

10 m = 1 Dekameter (Dm) oder eine Kette
100 m = 1 Hektometer (Hm)
1000 m = 1 Kilometer (Km)
10000 m = Myriameter (Mm)

Als Entfernungsmaß dient die Meile von 7500 Metern (Art. 4). Das Kilometer dient als Wegmaß und werden demnach gemessen: Bahnstrecken, Chausseen, Flüsse 2c. Das Meter wird beim Verkauf von Schnittwaren besonders gebraucht. Bauhandwerker, Ingenieure, Feldmesser (Geometer) und Forstbeamte gebrauchen längere Maße (Meßkette).

Anm. Zur Eichung werden Maßstäbe von folgenden Längen zugelassen: 20 Meter, 10, 5, 2, 1 Meter, $^5/_{10}$ Meter oder 5 Decimeter oder 50 Centimeter, $^2/_{10}$ Meter oder 2 Decimeter oder 20 Centimeter, $^1/_{10}$ Meter oder 1 Decimeter oder 10 Centimeter.

„Eichen" heißt Maßen und Gewichten die gesetzmäßige Größe und Schwere geben, dem Nr. oder Muttermaß gleich machen und das durch den Eichstempel zu bescheinigen. Zu diesem Zwecke gibt es Eichungsbehörden (Verifikatoren).

b) Flächenmaß.

Artikel 3 der Maß- und Gewichtsordnung setzt über dieselben folgendes fest:

Die Einheit der Flächenmaße bildet das qm, ein Quadratmeter, dessen Seite 1 m lang ist.

1 qm = 100 qdm
1 qdm = 100 qcm
1 qcm = 100 qmm.

Als Einheit des neuen Feldmaßes wird in Bayern das ha angenommen, die Unterabteilungen des ha werden durch a und qm bezeichnet. Für die Landesvermessung dient das qkm.

1 qkm = 100 ha = 10000 a = 1000000 qm
1 ha = 100 a = 10000 qm
1 a = 100 qm

Das neue Feldmaß wird verwendet beim Ausmessen von Feld- und Waldflächen. Um den Flächeninhalt von Ländern und Provinzen anzugeben, bedient man sich, wie bereits oben bemerkt, des Quadratkilometers und der Quadratmeile.

Die Quadratmeile umfaßt 7500 . 7500 = 56250000 qm = 5625 ha.

c) Körper- und Hohlmaße.

Die Einheit des Körpermaßes bildet das cbm oder Ster, ein Würfel, dessen Seite 1 m lang ist. Die Einheit des Hohlmaßes ist der tausendste Teil des cbm und heißt l. Ein cbm als Holzmaß heißt ein Ster.

a) Körpermaß

cbm = 1000 cdm

1 cdm = 1000 ccm

1 ccm = 1000 cmm.

b) Hohlmaß

1 hl = 100 l.

Anm. 1. 1 l = dem Inhalte eines cdm.

10 hl oder 1000 l = dem Inhalte eines cbm.

Anm. 2. 50 Liter bilden einen Scheffel. Im bürgerlichen Leben gebraucht man: Hektoliter, Scheffel, Liter, halbe Liter, Viertelsliter ꝛc. um Flüssigkeiten, Kartoffeln, Früchte, Sämereien ꝛc. zu messen. Die Hohlmaße heißen öfters auch Füllmaße.

Anm. 3. Um den kubischen Inhalt eines Zimmers, der Erdmassen, Baumstämme ꝛc. anzugeben, rechnet man nach cbm.

Anm. 4. Bei Gefäßen, z. B. Fässern, Balkons ꝛc. nach hl und l; bei ganz kleinen Körpern, z. B. die Teile einer Maschine nach ccm.

3. Gewichte.

Abgekürzte Bezeichnung der Gewichte:

Tonne = t
Kilogramm = kg
Gramm = g
Milligramm = mg
Centner = Ctr.
Pfund = ℔.

Die Einheit des Gewichtes bildet das kg = 2 ℔, das Gewicht eines l destillierten (chemisch reinen) Wassers bei + 4° Celsius.

1 kg = 1000 g

1 kg = 2 ℔

50 kg = 100 ℔ = 1 Ctr.

1000 kg = 2000 ℔ = 20 Ctr. = 1 t.

Anm. 1. 1 ℔ = $^1/_2$ kg = 50 Dg oder Neulot = 500 g.

Anm. 2. Durch die Einschiebung von ℔ und Ctr. wird das rein metrische System zwar unterbrochen, aber es leidet die dekadische Einteilung dadurch nicht, weil 2 und 5 Faktoren von 10 sind.

1 g = 10 dg

1 dg = 10 cg

1 cg = 10 mg.

Diese Unterabteilungen von g finden Verwendung in der Apotheke sowie als Gold-, Silber-, Juwelen- und Perlengewichte.

Zusammenhang zwischen Körper-, Hohlmaß und Gewicht.

1 ccm	Wasser (bei + 4° C.)	= 1 Milliliter	u.	wiegt	1 g
1000 ccm	„ „	= 1 l	„	„	1 kg.
1 cbm	„ „	= 1 hl	„	„	1 t.

4. Das Zeitmaß.

Die Zeit, welche die Erde braucht, um sich einmal um ihre Achse zu drehen, heißt ein Tag, gerechnet von einer Mitternacht zur andern. Die Zeit, welche die Erde braucht, um sich einmal um die Sonne zu bewegen, heißt Jahr.

Das bürgerliche Jahr hat 365 Tage, in einem Schaltjahre 366 Tage.

Das Jahr wird außerdem noch in 2 Semester oder 4 Quartale geteilt.

10 Jahre nennt man ein Decennium.
100 Jahre nennt man ein Säculum oder Jahrhundert.
1000 Jahre heißen ein Jahrtausend.

Im Geschäftsverkehr wird das Jahr durchschnittlich zu 360 Tagen, der Monat zu 30 Tagen gerechnet.

Eine Woche hat 7 Tage, aber nur 6 Arbeitstage. Der Arbeitstag wird zu 12 Stunden gerechnet.

Das astronomische Jahr hat 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 48 Sekunden.

1 Tag = 24 Stunden
1 Stunde = 60 Minuten
1 Minute = 60 Sekunden.

Das Schaltjahr hat 366 Tage. Um zu bestimmen, ob das Jahr ein Schaltjahr zu 366 Tagen ist, dividirt man die Jahreszahl durch 4; bleibt kein Rest, so ist das Jahr ein Schaltjahr. Ausgenommen sind die Jahre, welche durch 100, nicht aber durch 400 teilbar sind; im letzteren Falle, sowie wenn ein Rest bleibt, ist das Jahr ein gemeines Jahr.

Das Jahr wird in 12 Monate (52 Wochen) eingeteilt, welche aber an Dauer verschieden sind.

Es hat der

Januar	der 1. Monat	31 Tage		Juni	der 6. Monat	30 Tage
Februar	„ 2. „			Juli	„ 7. „	31 „
	Gemeinjahr	28 „		August	„ 8. „	31 „
	Schaltjahr	29 „		September	„ 9. „	30 „
März	„ 3. Monat	31 „		Oktober	„ 10. „	31 „
April	„ 4. „	30 „		November	„ 11. „	30 „
Mai	„ 5. „	31 „		Dezember	„ 12. „	31 „

Um die Namen der Monate, welche 30 Tage haben, zu behalten, merkt man: Ap — Jun — Se — No d. h. April, Juni, September, November, die übrigen Monate haben 31, der Februar 28 oder 29 Tage.

Anm. Der Ausgangspunkt bei Zeitbestimmungen ist verschieden: so zählen z. B. die christlichen Völker von der Geburt Christi an, die Muhamedaner von der Flucht Muhameds von Mekka nach Medina, die Juden von Erschaffung der Welt an ꝛc.

Abkürzungen für die Zeitmaße:

a, J. = anno, Jahr; Mt. = Monat; Tg. oder d (dies) = Tag; Std. oder h (hora) = Stunde; Wch. = Wochen; Min. (′) = Minuten; Sek. (″) = Sekunden.

5. Bogen- und Winkelmaß.

Den Umfang eines Kreises*) teilt man in 360 Grade (360°).

1° = 60 Minuten (Bogenminuten)

1 Minute = 60 Sekunden (Bogensekunden).

Der rechte Winkel (Quadrant) hat 360 : 4 = 90°.

Abkürzungen für Bogen- und Winkelmaße:

° = Grad; ′ = Minute; ″ = Sekunde.

6. Wertmaß (Geld).

a) Neue deutsche Reichsmünze.

Durch Reichsgesetz vom 4. December 1871 wurde die Einführung der Gold- statt der Silberwährung bestimmt.

Die Münzeinheit der deutschen Reichswährung ist die Mark (M.), welche in 100 Pfennige (₰) eingeteilt wird.

Goldmünzen:

Das Zwanzigmarkstück (Doppelkrone),
„ Zehnmarkstück (Krone),
„ Fünfmarkstück (halbe Krone).

*) Die Definition des Kreises bleibt dem Unterrichte vorbehalten.

Silbermünzen:

Das Fünfmarkstück,
„ Zweimarkstück,
„ Einmarkstück,
„ Fünfzigpfennigstück,
„ Zwanzigpfennigstück.

Nickelmünzen:

Das Zehnpfennigstück,
„ Fünfpfennigstück.

Kupfermünzen:

Das Zweipfennigstück,
„ Einpfennigstück.

Münzstätten Deutschlands, deren Namen auf den einzelnen Münzen durch die eingeklammerten Buchstaben angegeben sind:

Berlin (A), Hannover (B), Frankfurt a/M. (C), München (D), Dresden (E), Stuttgart (F), Karlsruhe (G), Darmstadt (H) und Hamburg (J).

Außer den aus Gold, Silber, Nickel und Kupfer geprägten Münzen ist auch Papiergeld im Umlauf. (Das Nähere siehe im Kapitel Staatspapiere ꝛc.)

Anm. Während die deutschen Reichsgoldmünzen dem Course nicht unterworfen sind, sind die ausländischen Goldmünzen dem Course unterworfen d. h. steigen oder fallen in ihrem Werte.

b) Ausländische Münzen.

1) die österreichische Währung (ö. W.) 1 fl. = 100 Neukreuzer (2 ℳ);
2) die französische Währung 1 Franc = 100 Centimes (80 ₰);
in der Schweiz ist 1 Franc = 100 Rappen (80 ₰);
3) die italienische Währung 1 Lira = 100 Centesimi (80 ₰);
4) die englische Währung 1 Pfund Sterling (Livre Sterl., Sovereign) ≙ 20 ℳ 43 ₰ circa, 1 Pfund Sterling = 20 Schilling, 1 Schilling = 12 Pences;
5) die russische Währung 1 Silberrubel = 100 Kopeken (3 ℳ 20 ₰ circa);
6) die amerikanische Währung 1 Dollar = 100 Cents (4 ℳ 25 ₰ circa).

Abkürzungen für Münzen.

M. = Mark, *₰* = Pfennig; fl. = Gulden (florin); nkr. = Neukreuzer.
fr. = Franc (Plural: frs. = Francs); c. = Centime (Plural: cs. = Centimes).
₤ = Lira (Plur: Lire); c. = Centesimo (Plur.: cs. = Centesimi.
£ = Livre (Pfund) Sterling oder Sovereign; sh. = Schilling engl.; d. = Pence (Plural: Pences).
S = Silberrubel; Kop. = Kopeken.
$ = Dollar (Plural: Dollars).
c. = Cent (Plural: cs. = Cents).

Fragen.

1) Welches sind die im geschäftlichen Verkehr gebräuchlichsten Stückmaße?
2) Wie wird das alte Papiermaß und wie das neue Papiermaß eingeteilt?
3) In welchen Ländern ist das metrische Maß- und Gewichtssystem eingeführt?
4) Welches sind die wesentlichen Vorzüge dieses Systems?
5) Wie vielerlei Maße unterscheidet man hinsichtlich der zu messenden Gegenstände?
6) Wozu dienen die Längenmaße und wie wird das Längenmaß eingeteilt?
7) Was versteht man unter „Eichen"?
8) Was versteht man unter einer Fläche?
9) Wozu ist im praktischen Leben das Flächenmaß notwendig und wie wird dasselbe eingeteilt?
10) Nach welchem Maße wird der Flächeninhalt von Provinzen und Ländern bestimmt?
11) Welches Maß dient zur Angabe des Raumes, den ein Körper einnimmt?
12) Wie heißt die Einheit des Körpermaßes und wie wird dasselbe eingeteilt?
13) Wie wird das Holz gemessen?
14) Was versteht man unter Hohlmaß, wer gebraucht es und wozu?
15) Wie heißt die Einheit des Gewichtes?
16) Wie wird das Gewicht eingeteilt?

17) Welcher Gewichte bedient sich der Apotheker und welcher der Gold- und Silberarbeiter?

18) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Körper- und Hohlmaß und Gewicht?

19) Welchen Namen führen die verschiedenen Zeitmaße?

20) Welcher Unterschied besteht zwischen dem bürgerlichen, kaufmännischen und astronomischen Zeitmaß (Jahr, Monat und Tag)?

21) Was ist ein Quartal, ein Semester, ein Decennium, ein Säculum?

22) Wann wird ein Jahr ein gemeines Jahr und wann ein Schaltjahr genannt?

23) Wie kann man bestimmen, ob ein Jahr ein gemeines oder ein Schaltjahr ist?

24) Welche Monate haben 31 und welche 30 Tage?

25) In welchen Jahren hat der Februar 29 Tage?

26) Wie wird das Bogen- und Winkelmaß eingeteilt?

27) Wie heißt die Münzeinheit der deutschen Reichswährung?

28) Welche deutsche Reichsmünzen sind im Umlauf, aus welchen Metallen werden sie geprägt und wie heißen die deutschen Münzstätten?

29) Woran erkennt man genau, in welcher Münzstätte eine Reichsmünze geprägt worden ist?

30) Welches Geld ist außer den Münzen noch im Umlauf?

31) Welches sind die außer der deutschen Reichswährung im Handel und Verkehr am häufigsten vorkommenden ausländischen Währungen?

32) Nennet die im Handel und Verkehre vorkommenden, euch bekannten ausländischen Münzen und gebet deren Wert nach deutscher Reichswährung an!

33) Was versteht man unter Cours und welche Münzen sind demselben nicht unterworfen?

Abkürzungen für Geschäftsgebräuche.

a. c. = anni currentis, laufenden Jahres,
av. = avance, Gewinn,
B$\underline{\underline{\text{tto}}}$, N$\underline{\underline{\text{tto}}}$, T$\underline{\underline{\text{a}}}$ = Brutto, Netto, Tara,
ca. = circa, ungefähr,

dc. = decimal, (Abstufung nach je 10),
do. = ditto, desgleichen,
p. a. = pro anno, für das Jahr,
k. S. = kurze Sicht,
p. c., % = Procent, für 100,
p. m. ‰ = Promille, für 1000,
pr. Mt. = per Monat, für den Monat.
ulto. = ultimo, am letzten Tage.

Anm. Das Gewicht der Ware sammt der Verpackung (emballage) nennt man das Bruttogewicht der Ware (kaufm. kurzweg Brutto). Das Gewicht der Ware ohne Verpackung wird Nettogewicht genannt (kaufm. kurzweg Netto). Endlich das Gewicht der Verpackung (emballage) heißt Tara.

b) Resolvieren und Reducieren.

1) Resolvieren heißt Einheiten der höheren Sorte in Einheiten der niederen Sorte verwandeln (auflösen), z. B. Mark in Pfennig. Dies geschieht durch die Multiplikation der höheren Sorte mit der sogenannten Reduktionszahl.

Unter Reduktionszahl (Verwandlungszahl) versteht man jene Zahl, welche angibt, wie viel Einheiten einer niederen Ordnung eine Einheit einer höheren Ordnung ausmachen.

1) Beispiel. ? Pfennig sind 5 Mark 16 Pfennig?

5 × 100 + 16 = 516 Pfennig.

2) Beispiel. Wie viel g geben 1 t 10 Ctr. 25 kg 1 ℔ 250 g?

1 t = 1 . 20 Ctr.
20 Ctr.
+ 10 Ctr.
30 Ctr. = 30 . 50 kg
1500 kg
+ 25 kg
1525 kg = 1525 . 2 ℔
3050 ℔
+ 1 ℔
3051 ℔ = 3051 . 500 g
1525500 g
+ 250 g
1525750 g

1 t 10 Ctr. 25 kg 1 ℔ 250 g = 1525750 g.

3. Beispiel. Wie viele Sekunden geben 7 Tage 7 Stunden 10 Minuten und 5 Sekunden?

7 d 7 h 10′ 5″

7 d = 7 . 24 h

168 h
+ 7 h

175 h = 175 . 60′

10500′
+ 10′

10510′ = 10510 . 60″

630600″
+ 5″

630605″

7 d 7 h 10′ 5″ = 630605″

oder

[((7 . 24 + 7) . 60 + 10) . 60 + 5] = ″
[(175 . 60 + 10) . 60 + 5] = ″
[10510 . 60 + 5] = 630605″ geben 7 d 7 h 10′ 5″.

1) Reducieren heißt, Einheiten einer niederen Ordnung in Einheiten der höheren Ordnung umwandeln (zurückführen) z. B. Pfennig in Mark.

Das Reducieren geschieht durch die Division der niederen Sorte durch die Reduktionszahl.

1) 8315 Pf. ? Mark
= 8315 : 100 = 83 Mark 15 Pf.

2) 3114 Sekunden ? Stunden ꝛc.
311 (4 Sek. : 6 (0 = 51 Minuten 54 Sek. Rest
= 51 Minuten 54 Sekunden.

3) 7239 Centimes ? Francs
7239 : 100 = 72 Francs 39 Centimes.

4) Wie viele ha, a und qm geben 735947 qm?

735947 qm = 735947 qm : 100 = 7359 a
(Rest 47 qm)

7359 a = 7359 a : 100 = 73 ha
(Rest 59 a)

735947 qm = 73 ha 59 a 47 qm oder

ha | a |
73|59|47 qm = 73 ha 59 a 47 qm.

5) Wie viele Tonnen, kg und g geben 756325027 g?

t | kg |
756|325|027 g = 756 t 325 kg 27 g.

6) Wie viele Tage sind 630605″?

630605″ = 630605″ : 60 = 10510′
(Rest 5″)

10510′ = 10510′ : 60 = 175 h
(Rest 10′)

175 h = 175 h : 24 = 7 d
(Rest 7 h)

630605″ geben 7 d 7 h 10′ 5″

Fragen und Aufgaben.

1) Was heißt resolvieren und was heißt reducieren?
2) Was versteht man unter der Reduktionszahl?
3) Wie viele Stücke geben 7 Groß 6 Dutzend 10 Stück?
4) Wie viele Stück geben 10 Schock 3 Mandel 12 Stück?
5) Wie viele Stück geben 20 Groß 7 Dutzend?
6) Wie viele Stück geben 60 Schock 2 Mandel?
7) Wie viele Bogen Schreibpapier (altes Papiermaß) geben 5 Ballen 4 Rieß 15 Buch 18 Bogen?
8) Wie viele Bogen Papier geben 10 Ballen 6 Rieß 8 Buch 4 Heft 7 Bogen?
9) Wie viele Meter geben 7 Myriameter 6 Kilometer 9 Hektometer 7 Dekameter 5 Meter?
10) Wie viele Millimeter sind 7 Kilometer 10 Meter 5 Decimeter 7 Centimeter 5 Millimeter?
11) Wie viele Millimeter sind 8 Kilometer 75 Meter 9 Centimeter?
12) Wie viele Meter sind 15 Meilen 5 Kilometer?
13) Wie viele Meter sind 20 Meilen 10 Meter?
14) Wie viele Quadratmeter geben 150 ha 50 a 50 qm?
15) Wie viele Quadratmeter geben 7 ha 508 qm?
16) Wie viele Quadratmeter geben 12 ha 90 a?

17) Wie viele Kubikmillimeter sind 6 cbm 132 cdm 905 ccm und 250 cmm?

18) Wie viele Kubikcentimeter sind 24 cbm?

19) Wie viele Kubikdecimeter sind 12 hl 50 l?

20) Wie viele Kubikmeter sind 50 Ster?

21) Welchen Raum nimmt 1 g ein?

22) Welchen Raum nehmen 50 kg ein?

23) Welchen Raum nimmt a) 1 ℔; b) 3 Ctr.; c) 4 t Wasser ein?

24) Welches Gewicht haben a) 7 hl; b) 15 cbm destillierten Wassers?

25) Wie viele Gramm geben 3 t 10 Ctr. 25 kg 1 ℔ 250 g?

26) Wie viele Gramm sind 12 Ctr. 30 ℔ 150 g?

27) Wie viele Gramm geben 5 t 435 kg 776 g?

28) Wie viele Gramm geben 10 t 200 kg 15 g?

29) Wie viele Gramm geben 9 t 50 g?

30) Das astronomische Jahr hat 365 d 5 h 48′ 48″; wie viele Sekunden sind dies?

31) Wie viele Sekunden hat ein Schaltjahr?

32) Wie viele Stunden hat der Monat Februar a) in einem gemeinen Jahr; b) in einem Schaltjahr?

33) Wie viele Minuten und wie viele Sekunden hat a) 1 Tag; b) 1 Woche?

34) a) Wie viele Bogenminuten, b) wie viele Bogensekunden hat der Umfang dreier Kreise?

35) Wie viele Pfennige D.R.W. geben a) 1000 *M.*; b) 500 *M.* 80 ₰; c) 60 *M.* 90 ₰; d) 150 *M.* 60 ₰?

36) Wie viele Centimes geben a) 1500 frs.; b) 150 frs. 60 cs.?

37) Wie viele Neukreuzer geben a) 105 fl. 5 nkr.; b) 100 fl. 7 nkr.; c) 1200 fl. Ö.W.?

38) Wie viele Pences geben a) 22 £ 12 sh 7 d; b) 56 £ 10 d; c) 15 sh 7 d?

39) Wie viele Centesimi geben a) 500 £ 7 cs; b) 3000 £; c) 650 £ 90 cs?

40) Wie viele Kopeken geben a) 1800 R°S; b) 17 R°S 20 Kop.; c) 60 R°S 7 Kop.?

41) Wie viele Cents geben a) 300 $; b) 150 $ 5 cs; c) 50 $ 10 cs?

42) a) Wie viele Groß; b) wie viele Dutzend; c) wie viele Schock; d) wie viele Mandel geben 12600 Stück?

43) Wie viele Ballen, Rieß, Buch und Bogen (Druckpapier, altes Papiermaß) geben 15624 Bg.?

44) Wie viele Ballen, Rieß, Buch, Heft und Bogen geben 30000 Bg. (neues Papiermaß)?

45) Wie viele Kilometer geben 586722 m?

46) Wie viele Meilen geben 786523 m?

47) Wie viele Meter und Centimeter sind 70586 mm?

48) a) Wie viele Hektar; b) wie viele Ar geben 526763 qm?

49) Wie viele Hektar sind a) 17500 a; b) 97692 qm?

50) Wie viele Ster sind 30000 cbm?

51) Wie viele Kubikmeter, Kubikdecimeter sind 7865627 ccm?

52) Wie viele Hektoliter sind a) 50000 l; b) 67324 l?

53) Wie viele Hektoliter und Liter sind 732726 halbe Liter?

54) Wie viele Tonnen, Zentner, Kilogramm, Pfund und Gramm sind 13786537 g?

55) Wie viele Zentner und Pfund geben 70525 g?

56) Wie viele Gramm geben 25630 mg?

57) Wie viele Tonnen und Zentner sind a) 2500 kg; b) 40000 ℔?

58) Gebet in Hektoliter den Raum von a) 10000 cdm; b) 17 cbm; c) 1000000 ccm an!

59) Wie viele Jahre, Monate, Wochen, Tage und Stunden hat Jemand gelebt, der 650000 h alt ist?

60) a) Wie viele Tage; b) wie viele Stunden geben 150000 ''?

61) Wie viele Grade sind a) 60000 Bogensekunden; b) 36000 Bogenminuten?

62) a) Wie viele Doppelkronen; b) wie viele Kronen; c) wie viele halbe Kronen; d) wie viele Zweimarkstücke; e) wie viele Markstücke; f) wie viele Fünfzigpfennigstücke; g) wie viele Zwanzigpfennigstücke erhält man für 7650000 ₰?

63) Wie viele Gulden ö. W. sind 60000 nkr?

64) Wie viele Gulden ö. W. und wie viele Neukreuzer sind 250025 nkr?

65) Wie viele Francs sind a) 56000 cs; b) 567325 cs?

66) Wie viele Pfund Sterling, Schilling und Pences geben 586536 d?

67) Wie viele Pfund Sterling (Sovereign) sind 168000 d?

68) Wie viele Silberrubel geben a) 36780 Kop; b) 60000 Kop?
69) Wie viele Dollars sind a) 50000 cs; b) 36560 cs?
70) Wie viele Lire geben a) 90000 cs; b) 35650 cs?

c) Die vier Grundrechnungsarten mit benannten Zahlen.

1) Addition.

Addiert können nur gleichnamige Zahlen werden; die Summe ist alsdann von derselben Art.

z. B. 23 ℳ + 17 ℳ = 40 ℳ

Wenn mehrfach benannte Zahlen zu addieren sind, schreibt man die gleichnamigen Einheiten genau untereinander, beginnt die Addition bei der niedrigsten Einheit, welche man gleich zu höheren Einheiten reduciert.

Beispiel.

1) Bei einem Hausbau betrugen die Auslagen für Maurerarbeit 5876 ℳ 93 ₰, für Zimmermannsarbeit 998 ℳ 72 ₰, für Tüncherarbeit 796 ℳ 85 ₰, für Schreinerarbeit 1015 ℳ 44 ₰, für Schlosserarbeit 1506 ℳ 13 ₰, für Glaserarbeit 688 ℳ, für Dachdeckerarbeit 967 ℳ 95 ₰, für Spänglerarbeit 98 ℳ 17 ₰, für Tapeziererarbeit 317 ℳ, für anderweitige Ausgaben wurden noch 780 ℳ 75 ₰ bezahlt. Wie hoch kam der ganze Hausbau?

Anm. Hat man 7 ℳ 50 ₰ zu schreiben, so schreibt man 7,50 ℳ.

5876 ℳ 93 ₰	oder	5876,93 ℳ
998 ℳ 72 ₰	"	998,72 ℳ
796 ℳ 85 ₰	"	796,85 ℳ
1015 ℳ 44 ₰	"	1015,44 ℳ
1506 ℳ 13 ₰	"	1506,13 ℳ
688 ℳ — ₰	"	688,— ℳ
967 ℳ 95 ₰	"	967,95 ℳ
98 ℳ 17 ₰	"	98,17 ℳ
317 ℳ — ₰	"	317,— ℳ
780 ℳ 75 ₰	"	780,75 ℳ
13045 ℳ 94 ₰	"	13045,94 ℳ

kostet der ganze Hausbau.

2) Eine Ware wiegt Netto 20 kg 770 g, die Tara beträgt 2 kg 530 g; Wie groß ist das Bruttogewicht der Ware?

20 kg 770 g = Nettogewicht
2 kg 530 g = Tara
23 kg 300 g beträgt das Bruttogewicht der Ware.

3) Welches war der Einkaufspreis einer Ware, welche jemand in London mit einem Verlust von 15 £ 3 sh 8 d für 74 £ 16 sh 4 d verkaufte?

74 £ 16 sh 4 d Verkaufspreis.
15 £ 3 sh 8 d Verlust.
―――――――――――
20:20 12:12
90 £ — sh — d betrug der Einkaufspreis der Ware.

Anm. Sind viele Summanden oder Posten, wie z. B. in einer großen Rechnung im Haushaltungsbuche zu addieren, so teile man sie in mehrere Aufgaben, suche dann die Teil- oder Partial-Summen und vereinige diese durch eine Zusammenstellung zuletzt in die Gesammt- oder Total-Summe.

Sind die Posten fortlaufend und stehen sie auf mehreren Seiten, wie z. B. in einem Contobuch oder in einem Kassabuch, so addiere man die verschiedenen Seiten und mache am Schluße eine Zusammenstellung der einzelnen Seitenbeträge (Latus), welche addiert dann die Haupt- oder Gesammt- oder Totalsumme geben.

Noch einfacher ist es, wenn man sofort jeden einzelnen Seitenbetrag (Latus) unter dem Namen Uebertrag (Transport) jedesmal zu oberst auf die nächstfolgende Seite schreibt und als Posten mitzählt. Dadurch enthebt man sich der Mühe einer Schlußzusammenstellung.

Fragen und Aufgaben.

1) Welche benannten Zahlen können nur addiert werden?
2) Was versteht der Geschäftsmann unter Brutto, Netto und Tara?
3) Wie erleichtert sich der Geschäftsmann beim Abschluß seiner Bücher behufs Feststellung seiner Einnahmen und Ausgaben die Arbeit?
4) Addiert folgende Posten:
24 M. 46 ₰, 4 M. 9 ₰, 107 M. 4 ₰, 460 M. 87 ₰, 23 M. 4 ₰, 1008 M. 25 ₰.
5) Summieret:
35 frs 80 cs, 76 frs 21 cs, 33 frs 34 cs, 106 frs 99 cs und 121 frs 3 cs.
6) Ein Kaufmann in Linz nahm an 6 Wochentagen folgende Summen in Oesterr. Währung ein: 100 fl. 29 nkr, 24 fl. 8 nkr, 860 fl. 54 nkr, 989 fl., 27 fl. 37 nkr, 104 fl. 1 nkr Ö. W. Wie viel betrug die Gesammteinnahme während der 6 Wochentage?
7) Vier Freunde teilen am Ende des Jahres den Gewinn von ihrem in Kompagnie geführten Geschäfte und es erhielt

A 996 ℳ 17 ₰, B 804 ℳ 98 ₰, C 1028 ℳ 16 ₰, D 799 ℳ 88 ₰; wie groß war der ganze Gewinn?

8) Schreibet in senkrechten Reihen untereinander und addieret folgende Beträge:

a) (London) 137 £ 9 sh 6 d + 82 £ 12 sh + 9 £ 10 d + 219 £ 18 sh + 17 sh 5 d + 31 £ 10 sh + 102 £ 9 sh 6 d + 8 £ 12 sh 6 d.

b) (New-York) 263 $ 85 cs + 9 $ 4 cs + 70 cs + 84 $ 93 cs + 1050 $ 9 cs + 786 $ + 1542 $ 60 cs + 63 $ 29 cs.

c) (Paris) 395 frs 80 cs. + 1047 frs 5 cs + 62 frs 34 cs + 1204 frs + 8 frs 75 cs + 619 frs 50 cs + 1790 frs 63 cs.

d) (Petersburg) 476 R°S 50 Kop. + 2348 R°S 75 Kop. + 51 R°S 80 Kop. + 1034 R°S 8 Kop. + 9 R°S 50 Kop. + 892 R°S 28 Kop. + 13 R°S 60 Kop. + 3747 R°S 35 Kop.

e) (Wien) 4008 fl. 64 nkr + 969 fl. 49 nkr. + 6544 fl. 71 nkr. + 96 fl. 96 nkr. + 7625 fl. 36 nkr. + 745 fl. 88 nkr. + 969 fl. 49 nkr.

f) (Rom) 7948 £ 39 cs + 1869 £ 48 cs + 769 £ 78 cs + 9877 £ 72 cs + 344 £ 55 cs + 84 £ 7 cs.

9) Ein Landmann verkaufte a) für 898 ℳ 82 ₰ Roggen, b) für 488 ℳ 82 ₰ Weizen, c) für 184 ℳ 96 ₰ Hafer und d) für 2040 ℳ 65 ₰ Tabak. Welche Summe nahm er im ganzen ein?

10) Ein Kaufmann erhält Sendungen an Zucker für 312 ℳ 54 ₰, an Kaffee für 225 ℳ 94 ₰, an Wein für 762 ℳ 19 ₰, an Oel für 56 ℳ, an Petroleum für 112 ℳ 85 ₰. Wie viel beträgt die Gesammtauslage für die genannten Sendungen?

11) Wie viel betragen die Summen folgender Posten:

	m	dm	cm	mm		km	km	dm	m		km	m
a)	9	4	6	8	b)	4	8	7	6	c)	5	533
	8	9	7	9		8	—	6	5		6	722
	7	6	5	4		7	9	5	3		7	923
	3	2	1	9		4	5	6	7		12	75
	8	7	6	5		6	3	1	5		25	132
	4	3	2	1		7	5	6	7		76	524

12) Ein Landmann besitzt 32 ha 5 a Ackerland, 46 ha 25 a 14 qm Wiesen, 72 a 65 qm Waldung, 22 ha 7 a 52 qm Weinberge. Wie viel Grundbesitz hatte er?

13) Wie viel Tapeten sind nötig zur Tapezierung eines Saales, wenn die Flächen der 4 Wände desselben nach Abrechnung der Fenster und Thüren folgende Größen haben?

a)	13 qm	7 qdm	13 qcm	46 qmm
b)	10	22	37	9
c)	24	—	9	—
d)	20	5	—	96

14) Ein Schreiner liefert folgende Arbeiten: Einen Tisch für 16 ℳ 85 ₰, eine Kommode für 20 ℳ 36 ₰, einen Schrank für 48 ℳ 98 ₰, ein Dutzend Sessel für 58 ℳ 72 ₰, einen Divan für 33 ℳ 87 ₰, einen Schreibtisch für 36 ℳ 56 ₰, einen Waschtisch für 10 ℳ 46 ₰. Wie viel beträgt die Lieferung?

15) Der Weinvorrat einer Weinhandlung besteht in 9 hl 22 l Rieslinger, 3 hl 5 l Tokayer, 18 hl 18 l Ungsteiner, 50 hl 3 l Bordeaux, 42 hl 33 l Deidesheimer, 14 hl 28 l Forster und 35 hl 53 l Affenthaler. Wie groß ist der Gesammtvorrat dieser Weinhandlung?

16) Wie viel betragen

132 cbm	720 cdm	844 ccm	267 cmm
725	865	729	348
364	472	813	872
422	581	586	167
133	192	241	304
576	265	413	316

17) Ein Holzhändler verkaufte in einem Vierteljahre 10720 cbm 725 cdm tannenes, 9840 cbm 480 cdm fichtenes, 5942 cbm 920 cdm buchenes und 9493 cbm 875 cdm eichenes Brennholz. Wie viele Ster hat er verkauft?

18) Wie viel beträgt der Kubikinhalt von 6 Baumstämmen, wenn der erste 3 cbm 643 cdm, jeder nachfolgende aber 672 cdm mehr mißt als der vorhergehende.

19) In einer öffentlichen Anstalt wurden im Laufe eines Jahres nach einander verbraucht:

	a)	4 St.	123 cdm	weiches Holz,
	b)	9	97	
	c)	13	—	
	d)	6	226	
	e)	4	728	
ferner	a)	3	126	hartes Holz.
	b)	2	956	
	c)	11	556	
	d)	8	212	
	e)	5	—	

Wie viel wurde von jeder der genannten Holzsorten in diesem Jahre verbraucht und was beträgt der gesammte Holzverbrauch der Anstalt in diesem Jahre?

20) Das Ausgabebuch eines Tischlers weist am Jahresschlusse folgende Hauptposten auf:
Unterhalt der Familie und Arbeiter 1346 ℳ 75 ₰, Lohn für 3 Gesellen 612 ℳ 50 ₰, angekaufte Hölzer 2460 ℳ 30 ₰, neue Werkzeuge 94 ℳ 35 ₰, Steuern 78 ℳ 12 ₰, Bau- und Reparaturkosten 108 ℳ 13 ₰, Kleider und Wäsche 178 ℳ 80 ₰. Wie viel beträgt die Gesammtausgabe dieses Mannes?

21) Von 5 Stück ist das erste 10 m 85 cm, das zweite 24 m 3 cm, das dritte 9 m 86 cm, das vierte 17 m 20 cm und das fünfte 15 m 8 cm lang. Welche Länge haben die 5 Stücke Tuch?

22) Eine Ware wiegt Netto 10 Ctr. 70 ℔ 400 g, die Tara beträgt 1 Ctr. 65 ℔ 205 g; wie groß ist das Bruttogewicht dieser Ware?

23) Welches ist der Einkaufspreis einer Ware, welche jemand mit einem Verlust von 47 ℳ 18 ₰ für 342 ℳ 92 ₰ verkaufte?

24) Wie viel beträgt das Alter von 7 Personen zusammen, wenn

die 1.	Person	46 Jahre	6 Mon.	18 Tage	21 Std.	56 Min.	48 Sek.
„ 2.	„	62	7	19	19	42	29
„ 3.	„	37	8	12	14	37	54
„ 4.	„	56	9	19	18	29	38
„ 5.	„	8	5	26	15	48	36
„ 6.	„	79	11	28	17	58	55
„ 7.	„	84	9	26	20	29	41

alt ist?

25) In einem Geschäfte wurden nach dem neuen Papiermaß verkauft

in der ersten Woche	2 Bll	5 Rs	3 Bch	3 Hft	5 Bg,
„ „ zweiten „	3 „	4 „	5 „	6 „	— „,
„ „ dritten „	1 „	8 „	7 „	5 „	4 „ und
„ „ vierten „	— „	9 „	8 „	8 „	8 „

Wie viel Papier wurde in diesen 4 Wochen verkauft?

26) Addieret

a)			b)	
18 Grss	3 Dtz	4 St.	6 Schock	9 St.
6 „	8 „	9 „	13 „	— „
9 „	6 „	10 „	29 „	48 „
5 „	8 „	5 „	10 „	25 „
12 „	8 „	9 „	6 „	— „
22 „	10 „	3 „		

27) **Rechnung**

für Herrn Steiner von B. Müller, Schuhmachermeister.

1883		M.	₰
2. Oktober	Ein Paar neue Stiefel	12	75
18. „	Ein Paar Stiefel besohlt . . .	2	25
3. Novbr.	Ein Paar Stiefel befleckt . . .	—	75
16. „	Ein Paar neue Schlafschuhe . .	3	25
1. Dezbr.	Für verschiedene Ausbesserungen .	1	35
23. „	Ein Paar neue Stiefel für den Sohn	5	50
	Summa		

28) In einer Buchdruckerei sind verbraucht worden im Januar 8 Rs 18 Bch 13 Bg; im Februar 1 Bll 2 Rs 2 Bch 22 Bg; im März 9 Rs 19 Bch 12 Bg; im April 2 Bll 13 Bg; im Mai 8 Rs 7 Bch 11 Bg; im Juni 1 Bll 4 Rs 16 Bch. Wie viel hat man in diesem Halbjahre verbraucht?

29) In einer Familie brauchte man während eines Jahres 125 M. 75 ₰ für Brennmaterial, 315 M. für Wohnung, 1032 M. 90 ₰ für Nahrungsmittel, 624 M. 35 ₰ für Kleider, 975 M. für sonstige Bedürfnisse und außerdem legte man 260 M. als Ersparnis zurück. Wie viel wurde eingenommen?

30) Wie viele Monate, Tage, Stunden und Minuten geben 1832 Jahre 10 Monate 17 d 12 h 37 ′ und 50 a 12 d 47 ′ 32 ″?

31) Ein Gewerbsmann hat am Ende des Jahres folgende Conti ausstehend:

a)	2728 ℳ	33 ₰
b)	526 „	— „
c)	377 „	14 „
d)	6753 „	96 „
e)	78 „	91 „
f)	356 „	92 „
g)	7860 „	32 „
h)	74 „	— „

Wie viel beträgt sonach der gesammte Ausstand dieses Gewerbsmannes am Ende des Jahres?

32) Auf einem Bahnwagen werden folgende Quantitäten verladen:

a)	2 Ctr.	75 ℔	— g
b)	16 „	93 „	365 „
c)	76 „	48 „	477 „
d)	92 „	— „	498 „
e)	36 „	92 „	14 „
f)	— „	63 „	385 „

Wie groß muß die Tragkraft des Wagens mindestens sein?

33) Bargeldsendungen dürfen gemäß der für das deutsche Reich bestehenden Fahrpostordnung das Gewicht von 4 ℔ nicht übersteigen. Wenn nun der Inhalt einer solchen Sendung besteht aus den Gewichten von:

a)	16 g	6 dg	7 cg
b)	377 „	8 „	9 „
c)	422 „	— „	9 „
d)	401 „	7 „	7 „
e)	781 „	5 „	8 „

kann dann diese Sendung gemäß der bestehenden Verordnung auf der Fahrpost befördert werden oder nicht?

34) In einer Großhandlung wurden verkauft:
37 Ctr 75 ℔, 75 Ctr 32 ℔, 26 Ctr 28 ℔, 45 Ctr 26 ℔, 70 Ctr 80 ℔, 20 Ctr 39 ℔.
Wie viel wurde verkauft?

35) Ein Fußgänger legte in einer Woche zurück:
7 h 25′, 10 h 35′, 15 h, 8 h 30′, 4 h 20′, 6 h 45′, 9 h 10′. Welchen Weg hat er gemacht?

2) Subtraktion.

Subtrahiert können nur gleichnamig benannte Zahlen werden. Die Differenz ist dann von derselben Art.

Beispiel.

1) Eine Ware kostet im Einkauf 317 M. 48 ₰, im Verkauf 328 M. 5 ₰; wie groß ist der Gewinn daran?

328 M. 5 ₰ (100)	=	Verkaufspreis.
317 M. 48 ₰	=	Einkaufspreis.
10 M. 57 ₰		werden an der Ware gewonnen.

2) Ein Kaufmann besitzt 38 Ctr 16 ℔ 125 g Zucker. Er verkaufte davon 13 Ctr 43 ℔ 375 g. Wie viel Zucker bleibt ihm noch übrig?

38 Ctr 16 (115) ℔ 125 (625) g	
13 Ctr 43 ℔ 375 g	
— 24 Ctr 72 ℔ 250 g	bleiben ihm noch übrig.

3) Von zwei Landgütern besteht das eine aus 35 ha 10 a 5 qm, das andere aus 29 ha 4 a 83 qm. Um wie viel ist das erstere größer als das letztere?

35 ha 10 a 5 (105) qm	oder	351005 qm
29 ha 4 a 83 qm	„	290483 qm
6 ha 5 a 22 qm		60522 qm
Das erste ist größer um		60522 qm = 605 a 22 qm
6 ha 5 a 22 qm		= 6 ha 5 a 22 qm.

Anm. Der Geschäftsmann berechnet aus der Differenz oder dem Unterschied des Einkaufes und Verkaufes einer Ware seinen Gewinn oder Verlust. Uebersteigt der Verkaufspreis den Einkaufspreis, so gewinnt er, während er verliert, wenn er die Ware billiger verkaufen muß, als sie ihm im Einkauf zu stehen kam, d. h. wenn der Einkaufspreis den Verkaufspreis übersteigt.

4) Die Activa eines Bierbrauers betragen 275682 M. 45 ₰, die Passiva 96997 M. 87 ₰. Wie groß ist das Netto oder reine Vermögen des Mannes?

275682 M. 45 ₰	Activa
96997 „ 87 „	Passiva
178684 M. 58 ₰	Netto oder reines Vermögen.

Anm. Unter dem Aktivvermögen eines Geschäftsmannes, auch Activa genannt, versteht man alles das, was derselbe besitzt:

1) An baarem Gelde;
2) an Immobilien (unbeweglichem Besitz) oder liegenden Gründen; z. B. Häusern, Gärten, Feldern, Wiesen 2c.;
3) an Mobilien (beweglichem Besitz), d. i. an Meubeln, Betten, Kleidungsstücken, Schmucksachen 2c.;
4) an Rohstoffen, Fabrikaten;
5) an Wechseln oder Staatspapieren;
6) an Forderungen (ausstehenden Geschäftsbeträgen 2c.).

Unter Passivvermögen, auch Passiva genannt, versteht man alles das, was der Geschäftsmann anderen schuldet, z. B. Hypothekschulden, welche auf seinem Immobilienbesitz lasten, oder Kurrentschulden (Geschäftsschulden).

Stellt man nun sämmtliche Activa und Passiva zusammen, so ergibt der Ueberschuß der ersteren über die letzteren das Nettovermögen oder den Vermögensstand des Geschäftsmannes. Uebersteigen die Passiva die Activa, so besitzt der Geschäftsmann kein Vermögen und arbeitet mit einem Deficit, d. h. das Geschäft rentiert sich nicht.

Fragen und Aufgaben.

1) Welche benannte Zahlen kann man nur subtrahieren?
2) Was versteht man unter Gewinn und Verlust und wie berechnet dieselben der Geschäftsmann?
3) Was versteht man unter dem Activ-, Passiv- und Netto- oder reinen Vermögen eines Geschäftsmannes?
4) Ein Kaufmann kauft den Meter Tuch um 8 *M.* 70 *ℌ* d. R. W. und verkauft denselben um 10 *M.* 25 *ℌ*. Wie viel gewinnt er am Meter?
5) Von einer Eisenbahn, die 200 km lang werden soll, sind bereits 171 km 229 m gebaut. Wie groß ist die noch zu bauende Strecke?
6) Jemand, der einen Wiesenplatz von 9 ha 60 a besitzt, verwendet davon eine Fläche von 87 a und 40 qm zu einem Garten und eine Fläche von 23 a 80 qm zum Anbau von Gemüse. Wie viel Wiesengrund bleibt ihm noch?
7) Der Planet Merkur bewegt sich um die Sonne in 87 Tagen 23 Stunden 14 Minuten 26 Sekunden; der Planet Venus aber in 224 Tagen 16 Stunden 41 Minuten 32 Sekunden. Um wie viel braucht der Planet Venus zur Bewegung um die Sonne länger?
8) Eine Ware wird für 113 *M.* 45 *ℌ* eingekauft und für 141 *M.* 24 *ℌ* verkauft. Wie viel wird beim Verkauf gewonnen oder verloren?

9) Ein Weinhändler hat 233 hl vorrätigen Wein; davon setzt er ab 69 hl 77 l an einen Wirt. Wie viel bleibt ihm noch?

10) Von 1264 ℳ 38 ₰ sind ausgegeben worden 748 ℳ 78 ₰. Wie viel ist noch übrig?

11) Ein Schuhmacher bezahlt dem Lederhändler 269 ℳ 70 ₰, während seine ganze Rechnung 345 ℳ 19 ₰ beträgt. Wie viel bleibt er schuldig?

12) Herr Peukert war 51 Jahre 2 Mon. 22 Tg. 16 Std. alt, sein ältester Sohn aber 23 J. 8 Mon. 19 Tg. 21 Std. Wie viel ist der Vater älter?

13) Ein Handelsmann brachte 2486 Schock 1 Mdl. 13 Stck. Gurken auf den Markt und verkaufte 1817 Schock 3 Mdl, 11 Stck. Wie viel blieben ihm übrig?

14) Von einer Schiffsladung, welche 23 t 627 kg 507 g betrug, mußten wegen Gefahr 6 t 873 kg 631 g ausgeworfen werden. Wie viel behielt man im Schiffe?

15) Die Einnahmen eines Kaufmannes betrugen in einem Jahre 66745 fl. 75 nkr ö. W., die Ausgaben 48976 fl. 87 nkr ö. W. Wie groß war sein Gewinn?

16) Eine Ware kostet nebst allen Unkosten 1226 ℳ 27 ₰, die Unkosten betragen 209 ℳ 98 ₰. Wie viel kostet die Ware ohne Unkosten?

17) Jemand kaufte für 9 ℳ 65 ₰ und gab ein Zwanzigmarkstück zum Wechseln. Wie viel erhielt er zurück?

18) Jemand gab von 400 frs 59 cs viermal 60 frs 75 cs aus. Wie viel behält er nach jeder Ausgabe übrig?

19) a) 27 Dtz 3 St — 9 Dtz 7 St?
b) 9 Schock — 3 Schock 14 St?
c) 24 Mandel 1 St. — 6 Mandel 12 St.?
d) 7 Viertel 12 St. — 6 Viertel 20 St.?

20) Wie viel bleibt übrig, wenn man von 8 Bll 9 Rs 17 Bch 11 Bg Schreibpapier 3 Bll 6 Rs 12 Bch 9 Bg (altes Papiermaß) wegnimmt?

21) A kaufte 25 kg 326 g Seide, unterwegs waren 3 kg 828 gr durch Nässe verdorben. Wie viel behielt er übrig?

22) Jemand hatte von einer Ware 150 kgr 900 gr; da bei ihm davon 157 kgr bestellt waren, so kaufte er das Fehlende noch an. Wie viel betrug dieses?

23) Das Bruttogewicht einer Ware betrug 156 kgr 15 gr, die Tara war 6 kgr 21 gr. Wie groß war das Nettogewicht?

24) Zwei Handelsfreunde erhielten zusammen 4 t 94 kg 29 g Brutto; die Tara betrug 64 kg 20 g; von der reinen Ware nahm der eine 3 t 139 kgr 50 gr. Wie viel erhielt der zweite?

25) Unter 104 kgr 28 gr einer Mischung von Kupfer und Zink sind 46 kg 48 gr Kupfer. Wie viel Zink ist in der Mischung?

26) Die Orte A, B und C liegen in einer geraden Linie hintereinander; A ist von C 60 km, A von B nur 23 km 486 m entfernt. Wie weit ist B von C entfernt?

27) Ein Rad hatte 3 m 47 cm 8 mm im Umfang; als es fortrollte, durchlief es eine Strecke von 2 m 86 cm 9 mm. Wie weit mußte es noch fortrollen, um eine ganze Umdrehung zu vollenden?

28) A kaufte 9 ha 25 a Ackerland und trat davon wieder 4 ha 38 a 76 qm ab. Wie viel behielt er noch übrig?

29) Ein Weinwirt will aus einem schadhaften Fasse von 22 l 5 dl 9 cl Inhalt den Wein in ein anderes Faß umfüllen; er findet, daß in das zweite Faß nur 18 l 4 dl 3 cl hineingehen. Um wie viel ist demnach das zweite Faß kleiner als das erste?

30) Einer öffentlichen Anstalt wurden zur Befriedigung ihres Holzbedarfes 412 Ster angewiesen; bei der Abrechnung findet sich, daß noch 22 St 75 cdm erübrigt wurden. Wie groß war also der Holzverbrauch in dieser Anstalt?

31) Ein Handlungshaus erhält eine Sendung Zucker im Gewichte von 21 Ztr 50 ℔ 36 dgr 7 gr mit Einschluß der Verpackung; das Gewicht der Verpackung betrug 1 Ztr 24 ℔ 44 dgr 9 gr. Wie viel Zucker erhielt somit das Handlungshaus?

32) Ein Oekonom besitzt 59 Ar 67 qm Wiesengrund; er möchte seinen Besitz soweit vergrößern, daß derselbe 1 ha beträgt. Wie viel muß er dann an Wiesengrund noch dazu erwerben?

3) Addition und Subtraktion.

Zeitrechnung.

Obschon die Zeitrechnung entweder als Addition oder Subtraktion mehrfach benannter Zahlen auftritt, so dürfte es doch nicht unzweckmäßig erscheinen, solcher Aufgaben, in welchen es sich um die Bestimmung eines Zeitpunktes oder eines Zeitraumes (Zeitdauer) handelt, gesondert zu behandeln. Durch die Zeitberechnung kann ermittelt werden:

1) Der Anfang einer Begebenheit,
2) die Dauer einer Begebenheit,
3) das Ende einer Begebenheit.

Hieraus folgt, daß bei jeder Begebenheit dreierlei in Betracht kommt, nämlich 1. der Anfang, 2. die Dauer und 3. das Ende derselben. Sind zwei dieser Bestimmungen bekannt, so läßt sich aus ihnen durch Addition oder Subtraktion die dritte ermitteln.

Bei dergleichen Berechnungen ist jedoch folgendes ganz besonders zu beachten:

1) Wir zählen unsere Jahre von Christi Geburt an. Solange man das Jahr 1 schrieb, war noch kein ganzes Jahr verflossen, sondern erst als die Jahreszahl 2 nach Christi Geburt geschrieben wurde. Das Jahr, welches durch die Jahreszahl bezeichnet wird, ist daher noch nicht ganz verlaufen. Als wir z. B. anfingen 1874 zu schreiben, so waren erst 1873 Jahre nach Chr. Geburt verflossen.

2) Eben so ist es mit den Monaten und Tagen. Der 7. März ist zwar der 7. Tag im 3. Monat; aber am 7. März ist weder der 3. Monat, noch der 7. Tag vollständig verflossen; es können daher nur 2 Monate und 6 ganz verflossene Tage in Anrechnung gebracht werden.

3) Der Tag hat 24 Stunden. Diese Stunden werden von nachts 12 Uhr bis wieder nachts 12 Uhr berechnet. Nun zählen wir freilich nach Einrichtung unserer Uhren die Stunden nur bis 12 und fangen dann wieder von 1 an; dies ist aber beim Rechnen anders. Morgens 1 Uhr ist die erste, mittags 12 Uhr die 12. Stunde, nachmittags 1 Uhr aber die 13., nachts 11 Uhr die 23. Stunde, weil 12 und 11 Stunden des Tages verflossen sind und 12 und 11 = 23 ist. Sonach wären z. B. am 7. März 1874 abends 5 Uhr verflossen: 1873 Jahre 2 Monate 6 Tage und 17 Stunden.

4) Die Zeit oder der Tag, an welchem etwas geschieht oder geschehen ist, nennt man die *laufende Zeit* oder das *Datum*, während die Jahre, Tage, Stunden und Minuten, welche von Christi Geburt an bis zu dem Zeitpunkt, welchen das Datum bezeichnet, verflossen sind, die *verflossene Zeit* bilden.

1. Der Anfang eines Zeitraumes ist gesucht.

Beispiel. Welches Datum schrieb man 90 Jahre 4 Monate 26 Tage vor dem 19. August 1874?

Auflösung. Den Anfang der Zeit findet man, wenn man die Zeitdauer vom Ende derselben abzieht.

Den 19. August 1874 war verflossen:

Ende:	1873	Jahre	7	Monate	$\overset{31}{18}$	Tage
Zeitdauer:	90	„	4	„	26	„
Anfang:	1783	„	2	„	23	„

90 Jahre 4 Monate 26 Tage früher als am 19. August 1874 waren wirklich 1783 Jahre 2 Monate und 23 Tage verflossen und man schrieb also damals den 24. März 1784.

2. Die Dauer eines Zeitraumes ist gesucht.

Beispiel. Wie viele Jahre, Monate, Tage, Stunden und Minuten sind verflossen vom 24. März 1764 abends $^3/_4$ auf 9 Uhr bis den 19. August 1864 mittags $^1/_4$ auf 1 Uhr?

Auflösung. Die Zeitdauer findet man, wenn man den Anfang von dem Ende abzieht. Das Ende der Aufgabe ist der 19. August 1864 mittags $^1/_4$ auf 1 Uhr und der Anfang ist der 24. März 1764 abends $^3/_4$ auf 9 Uhr. Damals waren verflossen:

Ende:	1863	Jhr.	7	Mon.	$\overset{31}{18}$	Tg.	$\overset{24}{12}$	Std.	$\overset{60}{15}$	Min.
Anfang:	1763	„	2	„	23	„	20	„	45	„
Zeitdauer:	100	„	4	„	25	„	15	„	30	„

Vom 24. März 1764 abends $^3/_4$ auf 9 Uhr bis den 19. August 1864 mittags $^1/_4$ auf 1 Uhr sind demnach 100 Jahre 4 Monate 25 Tage 15 Stunden und 30 Minuten verflossen.

3. Das Ende eines Zeitraumes ist gesucht.

Beispiel. Welches Datum schrieb man 90 Jahre 4 Monate 26 Tage später, als man den 24. März 1784 schrieb?

Auflösung. Das Ende der Zeit findet man, wenn man zum Anfange der Zeit die Zeitdauer addiert.

Am 24. März 1784 waren verflossen:

Anfang	1783 Jahre	2 Monate	23 Tage
Zeitdauer	90 „	4 „	26 „
	1873 Jahre	7 Monate	49 : 31 18 Tage

90 Jahre 4 Monate und 26 Tage später als am 24. März 1784 waren demnach 1873 Jahre 7 Monate und 18 Tage verflossen und man schrieb sonach den 19. August 1874.

Den Wochentag des 1. Juni für irgend ein Jahr unseres Jahrhunderts findet man, indem man die Jahreszahl des laufenden Jahrhunderts z. B. 83 für das Jahr 1883 durch 4 dividiert, den erhaltenen Quotienten ohne Berücksichtigung des sich ergebenden Restes zu dieser Jahreszahl addiert und die gefundene Summe durch 7 dividiert; der Rest zeigt den Wochentag des 1. Juni, wenn der Sonntag durch 0, der Montag durch 1, der Dienstag durch 2 ꝛc. ausgedrückt wird.

Aufgabe. Auf welchen Wochentag fällt der 1. Juni im Jahre 1883?

Auflösung. $83 : 4 = 20$; $(83 + 20) : 7 = 103 : 7 = 14$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 33 \\ 28 \\ \hline 5 \end{array}$$

Somit fällt der 1. Juni im Jahre 1883 auf einen Freitag.

Um den Wochentag eines anderen gegebenen Datums zu finden, zählt man vom 1. Juni vor- oder rückwärts, hiebei werden volle Monate zu 31 Tagen durch 3, mit 30 Tagen durch 2, der Februar im Schaltjahr durch 1, im Gemeinjahr durch 0 ausgedrückt.

Zur näheren Erklärung diene folgendes Beispiel.

Auf welchen Wochentag fiel der 16. August 1876?

Auflösung: $76 : 4 = 19$; $(76 + 19) : 7 = 95 : 7 = 13.$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 25 \\ 21 \\ \hline 4 \end{array}$$

Man findet durch die oben angegebene Berechnung, daß im Jahre 1876 der 1. Juni auf einen Donnerstag fiel, der 1. Juli auf einen zwei Tag späteren Wochentag, d. i. auf einen Samstag, der 1. August

auf einen 3 Tag späteren Wochentag, also auf einen Dienstag, der 8. und 15. ebenfalls auf einen Dienstag, mithin der 16. August auf einen Mittwoch.

Auf welchen Wochentag fiel der 15. April 1877?

Auflösung. $77 : 4 = 19$; $(77 + 19) : 7 = 96 : 7 = 13$

$$\begin{array}{r} 96 \\ 7 \\ \hline 26 \\ 21 \\ \hline 5 \end{array}$$

Durch Berechnung ergibt sich, daß der 1. Juni im Jahre 1877 auf einen Freitag fiel, der 1. Mai auf einen 3 Tage früheren Wochentag, d. i. auf einen Dienstag, der 1. April auf einen 2 Tage früheren Wochentag, d. i. auf einen Sonntag, ebenso der 8. und 15. April auf einen Sonntag.

Der berühmte im Jahre 1855 verstorbene Mathematiker Gauß hat zur Auffindung des Datums für den Ostersonntag im Verlaufe unseres Jahrhunderts nachstehende Formel angegeben.

Man dividiere die um 14 vermehrte Jahrzahl des laufenden Jahrhunderts durch 19 und nenne den dabei verbleibenden Rest a, dividiere die Jahrzahl durch 4 und nenne den Rest b, dividiere die um 1 vermehrte Jahrzahl durch 7 und nenne den Rest c, man dividiere ferner 190 + 23 durch 30 und nenne den Rest d, endlich dividiere man $2b + 4c + 6d + 4$ durch 7 und nenne den Rest e. Alsdann fällt der Ostersonntag auf den $(22 + d + e)^{ten}$ März oder den $(d + e - 9)^{ten}$ April.

Aufgabe. Mit Benützung dieser Formel soll Ostern für das Jahr 1883 berechnet werden.

Auflösung. $(83 + 14) : 19 = 97 : 19 = 5$

$$\begin{array}{r} 97 \\ 95 \\ \hline 2 \end{array} \qquad a = 2$$

$83 : 4 = 20$; $(83 + 1) : 7 = 84 : 7 = 12$

$$\begin{array}{r} 83 \\ 8 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 84 \\ 7 \\ \hline 14 \\ 14 \\ \hline - \end{array} \qquad \begin{array}{l} b = 3 \\ c = 0 \\ d = 1 \\ e = 2 \end{array}$$

$(19 \overset{38}{\cdot} 2 + 23) : 30 = 61 : 30 = 2$

$$\begin{array}{r} 61 \\ 60 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$(2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4) : 7 = 16 : 7 = 2$$
$$\frac{14}{2}$$

also ist Ostern den $(22 + 1 + 2)$ten März oder den $(1 + 2 - 9)$ten April.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie vielerlei kann bei Begebenheiten bezüglich der Zeit in Betracht kommen?

2) Was läßt sich ermitteln a) aus dem Zeitende und aus der Zeitdauer; b) aus dem Zeitanfange und dem Zeitende; c) aus der Zeitdauer und dem Zeitanfange?

3) Wie findet man a) aus dem Zeitende und der Zeitdauer den Zeitanfang; b) aus dem Zeitanfang und dem Zeitende die Zeitdauer; c) aus der Zeitdauer und dem Zeitanfange das Zeitende einer Begebenheit?

4) In welche Zeit müssen Zeitanfang und Zeitende stets umgewandelt werden?

5) Wie muß das gefundene Zeitende und der gefundene Zeitanfang in das betreffende Datum umgesetzt werden?

6) Wie werden folgende vollendete Zeiten als Datum ausgedrückt:
   a) 1840 Jahre, 1 Monate und 11 Tage?
   b) 1849 Jahre, 11 Monate und 30 Tage?
   c) 1862 Jahre?
   d) 1880 Jahre, 10 Monate und 7 Tage?
   e) 1882 Jahre, 2 Monate und 26 Tage?

7) Wie werden folgende Daten in vollendeter Zeit ausgedrückt:
   a) 3. April 1836?
   b) 11. Februar 1841?
   c) 1. Juli 1879?
   d) 2. Januar 1812?

8) Wie viele Stunden sind vom 15. November morgens 3 Uhr bis zum Jahresschluß?

9) Wie viele Monate, Tage und Stunden eines gemeinen Jahres sind am 15. Mai vormittags 11 Uhr verflossen?

10) Karl der Große starb den 28. Januar 814 in Aachen in einem Alter von 71 Jahren, 9 Monaten, 26 Tagen. Wann ist er geboren?

11) Göthe Johann Wolfgang wurde in Frankfurt a/M. geboren und starb den 22. März 1832 in einem Alter von 82 Jahren, 6 Monaten und 23 Tagen. Wann wurde er geboren?

12) Wann wurde Friedrich Schiller in Marbach a/N. geboren, der am 9. Mai 1805 in einem Alter von 45 Jahren, 5 Monaten und 29 Tagen starb?

13) Mozart wurde den 27. Januar 1756 in Salzburg geboren und starb den 5. Dezember 1791 in Wien. Wie alt wurde er?

14) Ein Kapital wurde am 19. Februar 1850 angelegt und am 7. Oktober 1871 wieder abgetragen. Wie lange stand es auf Zinsen aus?

15) Wie viel Zeit ist verflossen bis jetzt seit der Schlacht bei Sedan, welche am 2. September 1870 stattfand?

16) Welches Datum schrieb man 98 Jahre, 10 Monate, 25 Tage vor dem 19. August 1724?

17) Ein Gebäude, welches 1748 den 13. September abbrannte, war 56 Jahre, 11 Monate, 27 Tage vorher erbaut worden. Wann geschah dies?

18) Friedrich der Große ist am 24. Januar 1712 geboren. Wie alt wurde er, nachdem er den 17. August 1788 starb?

4. Multiplikation.

Aus dem Begriffe der Multiplikation folgt, daß lediglich der Multiplikand eine benannte Zahl sein kann, der Multiplikator aber eine unbenannte Zahl sein muß oder als solche anzunehmen ist. Das Produkt erhält die Benennung des Multiplikanden.

Um mehrfach benannte Zahlen zu multiplicieren, beginnt man die Multiplikation bei der niedrigsten Ordnung, reduciert das Produkt auf Einheiten der nächst höheren Ordnung und addiert diese zu dem Produkte, welches man durch Multiplikation dieser Ordnung erhalten hat.

Man kann auch mehrfach benannte Zahlen auf Einheiten der niedrigsten Ordnung reducieren, diese sodann multiplicieren und das Produkt wieder in mehrfach benannte Zahlen verwandeln, ein Verfahren, welches wieder bei benannten Zahlen mit decimaler Teilung besonders vorteilhaft ist.

Beispiele.

1) Das monatliche Einkommen eines Mannes beträgt 180 ℳ 60 ₰. Welches ist sein Einkommen in einem Jahre?

180 ℳ 60 ₰ . 12

60 ₰ . 12 = 720 ₰ = 7 ℳ 20 ₰
180 ℳ . 12 = 2160 „

2167 ℳ 20 ₰

beträgt sein jährliches Einkommen;

oder:

180 ℳ 60 ₰ . 12 = 18060 ₰ . 12

36120
18060

216720 ₰ : 100 = 2167 ℳ 20 ₰

beträgt sein jährliches Einkommen.

2) Jemand verdient monatlich 15 £ 12 sh 5 d. Wie viel beträgt sein jährlicher Verdienst?

Da 1 Jahr = 12 Monate, so beträgt das jährliche Einkommen 12 mal 15 £ 12 sh 5 d und man hat

5 d . 12	12 sh . 12	15 £ . 12
60 d : 12 = 5 sh	144 sh	180 £
— d	5 sh	7 „
	149 sh : 20 = 7 £	187 £
	9 sh	

Das jährliche Einkommen beträgt 187 £ 9 sh — d

oder:

15 £ 12 sh 5 d . 12 =
[((15 . 20 + 12) . 12 + 5) . 12] d =
[(312 . 12 + 5) . 12] d =
[3749 . 12] d = 44988 d

44988 d : 12 = 3749 sh : 20 = 187 £
— d 9 sh

Das jährliche Einkommen beträgt 187 £ 9 sh — d

oder:

15 £ 12 sh 5 d . 12 =

15 £ 15 . 20 sh = 300 sh
+ 12 sh

312 sh = 312 . 12 d = 3744 d
+ 5 d

3749 d . 12 =

7498
3749

44988 d : 12 = 3749 sh : 20 = 187 £
— d 9 sh

Das jährliche Einkommen beträgt 187 £ 9 sh — d

3) Jemand kauft einen Bauplatz, welcher 25 a 8 qm groß ist und bezahlt das qm mit 4 ℳ 20 ₰. Was hat er zu bezahlen?

25 a 8 qm = 2508 qm; 4 ℳ 20 ₰ = 420 ₰

2508 . 420 ₰ =

50160
10032

1053360 ₰ : 100 = 10533 ℳ 60 ₰ muß er bezahlen.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie werden mehrfach benannte Zahlen multipliciert und welches Verfahren erweist sich bei benannten Zahlen mit decimaler Teilung besonders vorteilhaft?
2) Wie viele kgr und gr Blei braucht man zu 48000 Flintenkugeln, wenn jede Kugel 33 gr 4 dgr wiegt?
3) Ein Landmann hat 4 hl und 85 l ausgesäet und macht eine 8fache Ernte. Wie viel erntet er?
4) Ein Eisenbahnzug legt in einer Sekunde 1 Dm 4 dm zurück. Welchen Weg macht er in einer Stunde?
5) Jemand kauft 6 Baumstämme mit je 785 cdm Inhalt. Was hat er dafür zu bezahlen, wenn der cdm mit 10 ℳ bezahlt wird?
6) Was kosten 99 Ar einer Wiese, wenn 1 Ar 11 ℳ 2 ₰ kostet?
7) Ein Bierbrauer hat 9 Fässer Bier noch im Keller, wovon jedes 35 hl 45 l hält. Wie viel Bier besitzt er noch?
8) Zur Pflasterung eines Ganges braucht man 625 Steine, von denen jeder 14 qdm 38 qcm Fläche hat. Wie viel qm faßt der Gang?
9) Eine Kanne Oel kostet 83 ₰. Wie teuer sind 250 Kannen?
10) Wie viel muß jemand jährlich einnehmen, wenn er wöchentlich 59 ℳ braucht?
11) Wenn 1 Dutzend 7 ℳ 75 ₰ kostet, was kosten 35 Groß 8 Dutzend 4 Stück?
12) Jemand gibt monatlich 148 ℳ aus. Wie viel braucht er in 7 Jahren?

13) Wenn ein Kaufmann im Durchschnitte täglich 378 M. einnimmt, wie viel nimmt er dann a) wöchentlich, b) jährlich ein?
14) 15 Pferde reichen mit einem Futtervorrate 46 Tage. Wie viele Pferde würden mit demselben Vorrate nur einen Tag ausreichen?
15) Was kostet ein Bauplatz von 448 qm, wenn für 1 qm 3 M. 50 ₰ bezahlt wird?
16) 1 Ctr kostet 47 M. 60 ₰. Wie viel kosten 17 t 13 Ctr 50 ℔?
17) Wenn 1 ℔ einer Ware 5 frs 40 cs kostet, was kosten 75 ℔?
18) Das ℔ einer Ware wird um 7 M. 70 ₰ verkauft, wie teuer der ganze Vorrat, der aus 30 Ctr 10 ℔ besteht?
19) Was hat man für 20 hl 50 l Wein zu bezahlen, wenn 1 l 2 M. 42 ₰ kostet?
20) Was kostet der Bau einer Straße von 16 km 6 hm 10 m Länge, wenn das laufende Meter auf 12 M. 6 ₰ zu stehen kommt?
21) Jemand verdient wöchentlich 65 M. 50 ₰. Welches ist sein Einkommen a) in einem Jahre, b) in einem Semester, c) in einem Quartale?
22) Jemand gibt täglich 18 frs 10 cs aus. Wie viel beträgt seine Jahresausgabe?
23) Was kosten 22 Stücke Tuch, jedes zu 36 m, wenn 1 m mit 2 M. 50 ₰ bezahlt wird?
24) Wenn 1 £ 20 M 32 ₰ wert ist, wie viel sind dann 172 £ 10 s 3 d wert?
25) Wenn 1 ℔ 2 fl. 78 nkr ö. W. kostet, was kosten dann 19 Ctr 85 ℔?
26) Ein Geselle erhält täglich 2 M. 20 ₰. Wie viel Arbeitslohn bekommt er in 6 Wochen 3 Tagen?
27) Wie viel beträgt das jährliche Kostgeld, wenn man wöchentlich 5 M. 60 ₰ bezahlt?
28) Ein Ster Buchenholz kostet 13 M. 40 ₰. Wie hoch kommen 125 Ster?
29) Was braucht eine Familie in einem Jahr, wenn sie monatlich 96 M. 60 ₰ braucht?
30) Von einem Schaf erhält man durchschnittlich 2 kg 580 g Wolle. Wie viel von 60 Schafen?

5. Division.

Bei der Division benannter Zahlen sind drei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Falle ist der Divisor eine unbenannte Zahl, im zweiten Falle ist der Divisor als eine unbenannte Zahl zu denken und endlich im dritten Falle hat der Divisor mit dem Dividenden gleichartige Benennung.

1) Während man bei den vorausgehenden Grundrechnungsarten die Rechnung bei der *niedrigsten Einheit* begann, fängt man dieselbe bei der Division bei der *höchsten Einheit an, indem man den etwaigen Rest der höheren Einheiten in die nächst niederen Einheiten auflöst.*

2) *Enthalten Dividend und Divisor Einheiten verschiedener Ordnungen, so verwandle man Alles in Einheiten der niedrigsten in der Aufgabe vorkommenden Ordnung und dividiere hierauf.*

Beispiel 1. Ein Bote legte einen Weg von 7 Meilen in 11 h 55′ 24″ zurück, wie lange brauchte er zu 1 Meile?

11 h 55′ 24″ : 7 = 1 h
7
―――
4 h = 4 . 60′
―――
240′
+ 55′
―――
295′ : 7 = 42′
28
―――
15
14
―――
1′ = 1 . 60″
―――
60″
+ 24″
―――
84″ : 7 = 12″

Den Weg von 1 Meile legte er zurück in 1 h 42′ 12″

Beispiel 2. Von einer Ware erhält man für 1 ℳ 9 ℔ 250 g, was hat man für 6 Ctr 46 ℔ zu bezahlen?

9 ℔ 250 g	6 Ctr 46 ℔
9 ℔ = 9 . 500 g	6 Ctr = 6 . 100 ℔
4500 g	600 ℔
+ 250 g	+ 46 ℔
4750 g	646 ℔ = 646 . 500 g
	323000 g

323000 : 4750 = 68 ℳ hat man für 6 Ctr 46 ℔ zu bezahlen, wenn man für 1 ℳ 9 ℔ 250 g erhält.

28500
— 38000
38000
—

Fragen und Beispiele.

1) Was hat man bei der Division benannter Zahlen zu beachten?
2) Wie viele Steinplatten von 26 qdm Größe braucht man, um einen Platz von 117 qm 52 qdm zu pflastern?
3) Wenn 7 Stück einer Ware 41 ℳ 23 ₰ kosten, was kostet 1 Stück?
4) Wenn 19 Stück einer Ware 68 fl. 78 nkr ö. W. kosten, was kostet 1 Stück?
5) Wenn 37 Stück 224 frs 22 cs kosten, was kostet 1 Stück?
6) In 16 gleich großen Fässern hat ein Bierbrauer 49 hl 28 l Bier. Wie viel Bier enthält 1 Faß?
7) 78 ℳ 19 ₰ sollen verteilt werden, daß jede Person 11 ℳ 17 ₰ erhält, wie viele Personen sind es?
8) Ein Winkel, der 124^{0} 48″ mißt, soll in 6 gleiche Teile geteilt werden. Wie groß ist jeder Teil?
9) Ein Dutzend Taschentücher kostet 14 ℳ 64 ₰. Wie hoch kommt ein Taschentuch?
10) Eine Familie brauchte im Juni 144 ℳ 60 ₰. Wie viel durchschnittlich an einem Tag?
11) Jemand hat eine jährliche Einnahme von 1489 ℳ 20 ₰. Was kommt auf den Tag?
12) Ein Händler kauft den Zentner Mehl um 60 ℳ und will 10 ℳ daran gewinnen. Wie muß er das ℔ verkaufen?
13) Jemand ist 1268 ℳ 80 ₰ schuldig und bezahlt wöchentlich 24 ℳ 40 ₰. Nach wie viel Wochen ist seine Schuld gedeckt?

14) Ein Beamter erhält monatlich 260 *M.* a) Wie viele Zwanzigmarkstücke, b) wie viele Zehnmarkstücke und c) wie viele Fünfmarkstücke beträgt sein Jahresgehalt?
15) 12 Personen haben einen Acker von 99 ha 34 a 68 qm in gleiche Teile unter sich zu teilen. Wie viel erhält jeder?
16) Ein Knabe verdiente täglich 75 ₰ und erhielt bei der Auszahlung seines Lohnes 10 *M.* 50 ₰. Wie viele Tage hat er dafür gearbeitet?
17) Wenn jemand täglich 2 *M.* 50 ₰ ausgibt, wie lange reicht er mit 250 *M.*?
18) In wie viel Tagen wird jemand 27 *M.* 45 ₰ ersparen, wenn er täglich 9 ₰ erspart?
19) Unter 24 Dörfer soll eine Summe von 7300 *M.* 32 ₰ in gleichen Teilen verteilt werden. Wie viel erhält jedes Dorf?
20) Zu den beiden Seiten einer Straße von 1 km 350 m Länge sollen Bäume gepflanzt werden. Wie viele Bäume sind nötig, wenn ihr Abstand von einander 6 m 25 cm betragen soll?
21) Zur Belegung eines Trottoirs von 1 a 21 qm 68 qdm Flächeninhalt werden Platten verwendet, deren jede 29 qdm 25 qcm groß ist. Wie viele Platten sind nötig?
22) Jemand wechselte bei einem Bankier 162 Stück $ und erhielt dafür 686 *M.* 88 ₰. Wie hoch wurde 1 $ gerechnet?
23) Eine Summe von 226 £ 13 sh 9 d soll unter 45 Personen gleichheitlich verteilt werden. Wie viel erhält jede Person?
24) Der Bau einer Straße von 7 km 28 m kostete 106474 *M.* 20 ₰. Wie hoch kommt das Meter?
25) Wie hoch kommt das Meter Tuch zu stehen, wenn 350 m mit 1137 frs 50 cs bezahlt werden?

d) Einfache Umfangs-, Flächen- und Körperberechnung.

Im Anschlusse an die vier Grundrechnungsarten dürfte hier der Berechnung des Umfanges, des Flächen- und Kubik-Inhaltes in Kürze Erwähnung geschehen.

Alles, was einen begrenzten Raum einnimmt, ist ein Körper. Derselbe hat eine dreifache Ausdehnung: Länge, Breite und Höhe (Dicke).

Die Grenzen eines Körpers nennt man Fläche. Eine Fläche hat zwei Ausdehnungen, nämlich Länge und Breite. Die Grenze

einer Fläche ist eine Linie, sie hat nur eine Ausdehnung, nämlich die Länge.

1. Umfangsberechnung.

Man erhält den Umfang (Perimeter) einer Fläche, wenn man die Seiten derselben addiert.

Beispiel 1. Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen erste Seite 7 dm, dessen zweite Seite 1 m und dessen dritte Seite 1 m 3 dm lang ist?

P = 7 dm + 10 dm + 13 dm = 30 dm = 3 m.

Beispiel 2. Der Umfang eines Viereckes beträgt 16 m. Die eine Seite 3 m, eine Seite 5 m, und eine Seite 4 m. Wie lang ist die 4. Seite?

S = 16 — (3 + 5 + 4) = 16 — 12 = 4 m ist die vierte Seite lang.

2. Flächenberechnung.

Den Inhalt einer Fläche findet man, wenn man Länge und Breite miteinander multipliciert.

F = L . B.

Beispiel 1. Ein Bauplatz ist 12 m lang und 7 m breit. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

F = 12 . 7 = 84 qm ist der Flächeninhalt des Bauplatzes.

Beispiel 2. Ein Acker hat einen Flächeninhalt von 12 a. Seine Länge beträgt 60 m. Wie breit ist derselbe?

B = F : L = 1200 : 60 = 20 m ist die Breite des Ackers.

Beispiel 3. Eine Wiese hat einen Flächeninhalt von 1 ha, die Breite derselben beträgt 100 m. Welches ist ihre Länge?

L = F : B = 10000 : 100 = 100 m ist die Länge der Wiese.

3. Körperberechnung.

Den Inhalt eines Körpers findet man, wenn man Länge, Breite (Dicke) und Höhe (Tiefe) miteinander multipliciert.

Beispiel 1. Ein Holzstoß hat eine Länge von 7 m, eine Breite von 2 m und eine Höhe von 3 m. Welches ist sein Kubikinhalt?

K = L . B . H = 7 . 2 . 3 = 42 cbm ist der Kubikinhalt des Holzstoßes.

Beispiel 2. Ein Saal hat einen Kubikinhalt von 8400 cbm, seine Länge ist 60 m und seine Breite 20 m. Welche Höhe hat dieser Saal?

H = K : (L . B) = 8400 : 1200 = 7 m ist die Höhe des Saales.

Aus vorstehenden Beispielen geht hervor:

Ist der Flächeninhalt gegeben und die Länge, so findet man die Breite, wenn man den Flächeninhalt durch die Länge dividiert und umgekehrt.

Ist der Kubikinhalt gegeben und zwei Ausdehnungen z. B. Länge und Breite, so findet man die dritte Ausdehnung, wenn man den Kubikinhalt durch das Produkt der beiden gegebenen Ausdehnungen dividiert.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie findet man den Inhalt einer Fläche?
2) Wie findet man die Länge, wenn der Flächeninhalt und die Breite gegeben ist und wie umgekehrt die Breite, wenn der Flächeninhalt und die Länge gegeben ist?
3) Wie findet man den Inhalt eines Körpers?
4) Wie findet man eine Ausdehnung, wenn der Kubikinhalt und zwei Ausdehnungen gegeben sind?
5) Die Seite eines gleichseitigen Viereckes (Quadrates) ist 65,5 m. Wie groß ist dessen Umfang?
6) Wie groß ist der Umfang a) eines gleichseitigen Dreieckes, b) eines gleichseitigen Zwölfeckes, dessen Seite 1 dm 5 cm lang ist?
7) Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen erste Seite 7 dm, dessen zweite Seite 1 m und dessen dritte Seite 1 m 3 dm lang ist?
8) Ein rechtwinkliger Garten ist 20 m 8 dm lang und 15 m 7 dm breit. Wie groß ist sein Umfang?
9) Ein viereckiger Platz, welcher 48 m 9 dm lang und 42 m 6 dm breit ist, soll mit Bäumchen eingefaßt werden, welche 1 m 5 dm von einander entfernt sind. Wie viel Bäumchen sind erforderlich?
10) Welchen Umfang hat die Schultafel, welche 148 cm lang und 95 cm breit ist?
11) Der Umfang eines regelmäßigen Viereckes ist 84132 m. Wie lang ist eine Seite?

12) Ein Dreieck hat 16 m 8 dm Umfang, die eine Seite ist 2 m 5 dm, die andere 7 m 3 dm lang. Wie lang ist die dritte Seite?

13) Welches ist der Umfang eines Kreises, wenn der Durchmesser 7 m 5 dm beträgt

14) Welches ist der Radius eines Kreises, welcher 12 m 5 dm 6 cm Umfang hat?

15) Ein Dreieck hat einen Umfang von 2 m 31 cm, die eine Seite desselben beträgt 84 cm 7 mm, die andere 69 cm 8 mm. Wie groß ist die dritte?

16) Ein kreisrunder Tisch hat einen Durchmesser von 1 m 8 dm. a) Wie groß ist sein Umfang, b) wie viele Personen finden daran Platz, wenn für jede Person 4 dm 7 cm 1 mm gerechnet werden?

17) Welche Fläche hat eine Wiese in Rechteckform, welche 785 m lang und 654 m breit ist?

18) Wieviel Fläche fordert eine Landstraße von 7 m Breite auf eine Länge von 1 bayerischen Meile, da die bayerische Meile = 7415 m ist?

19) Ein Saal (Rechteckform), der 15 m 4 dm lang und 7 m 5 dm breit ist, soll mit Brettern belegt werden, von denen jedes 3 m 3 dm lang und 5 dm breit ist. Wie viel Bretter braucht man?

20) Ein Gang, welcher 20 m 2 dm lang und 1 m 6 dm breit ist, soll mit Steinplatten gepflastert werden, von denen jede 3 dm 6 cm lang und ebenso breit ist. Wie viele Steinplatten braucht man?

21) Ein Theatersaal hat die Form eines Trapezes, dessen zwei parallele Seiten 2 Dm 16 dm und 4 Dm 2 dm lang sind; die zwei parallelen Seiten sind 4 Dm 4 m 6 dm von einander entfernt. Wie viele Personen finden in demselben Platz, wenn auf die Person 1 qm 3 qdm gerechnet werden?

22) Das Dach eines Hauses ist 12 m 4 dm lang und 7 m 5 dm breit, was kostet das Eindecken desselben mit Kupfer, wenn für den qm 3 ℳ 35 ₰ bezahlt werden?

23) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Kastens, der 15 dm lang, 9 dm breit und 8 dm hoch ist?

24) Wie viele Kubikdecimeter Sand faßt ein Karren, der im Innern 1 m 4 dm lang, 5 dm 8 cm breit und 5 dm hoch ist?

25) Was kostet ein viereckig behauener Eichenstamm, der 4 m 4 dm lang 5 dm breit und 5 dm dick ist, wenn 1 cbm 70 ℳ kostet?

26) Eine Mauer hält 8 cbm. Wie dick ist sie, wenn die Länge 8 m und die Höhe 2 m beträgt?

e) Durchschnittsrechnungen.

Den Durchschnitt zweier oder mehrerer Zahlen (die Durchschnittszahl, das arithmetische Mittel) findet man, wenn man die Summe der Angaben durch ihre Zahl dividiert.

z. B.

1) das arithmetische Mittel der Zahlen 9, 8, 7, 4, 5, 3?

$$\frac{9 + 8 + 7 + 4 + 5 + 3}{6} = 6.$$

2) Der niedrigste Preis des Zentners Weizen beträgt 8 fl. 50 nkr ö. W., der höchste 9 fl. 40 nkr. ö. W. Welches ist der Durchschnittspreis?

$$= \frac{8 \text{ fl. } 50 \text{ nkr} + 9 \text{ fl. } 40 \text{ nkr}}{2}$$

$$= \frac{17 \text{ fl. } 90 \text{ nkr.}}{2} = 8 \text{ fl. } 95 \text{ nkr ö. W.}$$ ist der Durchschnittspreis.

3) Ein Thermometer zeigte mittags 12 Uhr an den einzelnen Tagen einer Woche folgende Wärmegrade nach Réaumur: 14°, 17°, 16°, 22°, 19°, 18°, 20°. Welches ist der mittlere Thermometerstand dieser Woche?

Der Thermometerstand ist

$$(14^0 + 17^0 + 16^0 + 22^0 + 19^0 + 18^0 + 20) : 7 = 126^0 : 7 = 18^0.$$

4) Ein Weinhändler kauft dreierlei Weine: 7 hl 60 l, das l zu 2 ℳ 50 ₰, 4 hl 96 l, das l zu 2 ℳ 75 ₰ und 3 hl 5 l das l zu 3 ℳ 20 ₰. Diese 3 Sorten mischt er zusammen mit 39 l Wasser, wie hoch kommt 1 l der Mischung?

760 l à 2 ℳ 50 ₰	kosten 760 . 250 ₰	=	1900 ℳ
496 l à 2 „ 75 „	kosten 496 . 275 „	=	1364 „
305 l à 3 „ 20 „	kosten 305 . 320 „	=	976 „
39 l	— —		—
1600 l kosten zusammen			4240 ℳ

1 l kostet somit durchschnittlich

42(40 : 16(00 = 2 ℳ
32
1040 ℳ = 1040 . 100
1040(00 : 16(00 = 65 ₰
96
80
80
—

1 Liter kostet somit 2 ℳ 65 ₰.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie findet man die Durchschnittszahl oder das arithmetische Mittel?

2) Von 50 ha gibt jeder einen Ertrag von 9 ℳ, von 38 ha jeder 8 ℳ 50 ₰ und von 27 ha jeder 8 ℳ 15 ₰. Wie groß ist der durchschnittliche Ertrag per Hektar?

3) Wenn das Barometer nach je 8 Stunden folgende Höhen in mm zeigt: 755, 754, 756, 758, 757, 759, 758, 760, 762 und 759. Welches ist der mittlere Barometerstand in mm?

4) An einem Tag zeigt nach je 2 Stunden das Thermometer nach Réaumur 6°, 8°, 10°, 13°, 18°, 17°, 14°, 11°, 7°, 13° und 4°. Welches ist der mittlere Thermometerstand?

5) Jemand kauft 48 Flaschen Wein à 1 ℳ 20 ₰, 36 Flaschen à 1 ℳ 50 ₰, 50 Flaschen à 1 ℳ 80 ₰ und 75 Flaschen à 1 ℳ 60 ₰. Wie hoch ist der Durchschnittspreis einer Flasche?

6) Ein Gutsherr liefert 175 hl Korn, 250 hl Weizen, 236 hl Gerste und 84 hl Hafer. Er verkauft per hl Roggen um 11 ℳ 80 ₰, Weizen um 18 ℳ 25 ₰, Gerste um 9 ℳ 75 ₰ und Hafer um 6 ℳ 50 ₰. Wie groß ist der durchschnittliche Erlös per hl?

7) Ein Weinbergbesitzer erntet in 6 aufeinander folgenden Jahren folgende Weinmengen, die er zu den beigesetzten Preisen verkauft: 1) 175 hl à 82 ℳ 80 ₰, 2) 98 hl à 92 ℳ 40 ₰, 3) 140 hl à 87 ℳ, 4) 83 hl à 88 ℳ 20 ₰, 5) 129 hl à 85 ℳ 20 ₰ und 6) 74 hl à 84 ℳ. Wie viel beträgt 1) der durchschnittliche jährliche Ertrag des Weinberges; 2) der durchschnittliche Verkaufspreis per hl?

8) Für das erste Quartal beträgt die Einnahme 1763 ℳ 40 ₰ und die Ausgabe 1108 ℳ 50 ₰; für das zweite Quartal die Einnahme 2226 ℳ 80 ₰ und die Ausgabe 1793 ℳ 30 ₰; für das dritte Quartal die Einnahme 3109 ℳ 80 ₰ und die Ausgabe 2573 ℳ 10 ₰; für das vierte Quartal endlich die Einnahme 2620 ℳ und die Ausgabe 2137 ℳ 90 ℳ. Wie groß ist durchschnittlich per Monat 1) die Einnahme, 2) die Ausgabe und 3) der Ueberschuß?

9) Ein Tuchhändler kauft auf der Messe 6 verschiedene Sorten Tuch, und zwar 366 m à 12 ℳ 60 ₰, 480 m à 11 ℳ 40 ₰, 425 m à 10 ℳ 50 ₰, 586 m à 9 ℳ 45 ₰, 532 m à 8 ℳ 70 ₰ und 624 m à 7 ℳ. Wie groß ist der durchschnittliche Preis pro Meter?

10) Jemand kauft 50 Flaschen Wein à 2 ℳ 20 ₰, 25 Flaschen à 2 ℳ 50 ₰ und 75 Flaschen à 2 ℳ. Welches ist der Durchschnittspreis einer Flasche?

Vermischte Aufgaben über die vier Grundrechnungsarten mit benannten Zahlen.

1) A gibt dem B 63 Stück einer Waare, das Stück zu 1 ℳ 65 ₰, B gibt dagegen dem A 36 Stück einer anderen Waare, das Stück zu 2 ℳ 85 ₰. Wie viel beträgt die zur Ausgleichung des Tausches noch erforderliche Summe baren Geldes und von wem ist sie zu bezahlen?

2) Zu einem Bette rechnet man 64 m Barchent und auf jeden Meter Barchent 25 Dg Federn. Was kostet das Bett, wenn der Meter Barchent 75 ₰ und das Zollpfund Federn 4 ℳ 50 ₰ kostet?

3) 20 Ctr kosten 105 frs 50 cs, die Fracht für 1 Ctr 5 frs. Wie hoch kommt 1 kg?

4) Unter vier Personen sind 500 ℳ so zu verteilen, daß A um 15 ℳ 60 ₰ mehr als jede der drei übrigen erhält. Wie viel erhält jede Person?

5) A kauft das ℔ einer Ware um 90 ₰ und ein andermal 58 kg um 98 ℳ 60 ₰. Was beträgt der Preisunterschied per ℔ und kg?

6) A, B und C haben bei einem Geschäfte 540 ℳ gewonnen. Wie viel trifft davon auf jeden, wenn A 3 Teile, B 2 Teile und C 1 Teil des Gewinnes erhält?

7) 1 hl Weizen wurde an vier Schrannentagen bezahlt mit 18 ℳ 48 ₰, 14 ℳ 52 ₰, 16 ℳ 40 ₰ und 15 ℳ 24 ₰, welches ist der Durchschnittspreis?

8) Eine Haushaltung verbrauchte in den 6 Wintermonaten 56 Ctr Steinkohlen, den Ctr zu 1 ℳ 25 ₰ und 6 Ster hartes Holz à 12 ℳ 60 ₰, das Kleinmachen und Tragen des Holzes kostete 8 ℳ 60 ₰. Wie viel betrugen monatlich die Auslagen für Brennmaterial?

9) Eine Frau will ihrem Manne 1 Dtzd. Hemden machen. Zu 1 Hemde braucht sie 3 m Leinwand à 2 ℳ 68 ₰, das Machen eines Hemdes kommt auf 54 ₰. Wie viel beträgt die Ausgabe?

10) Ein Schreiner bekam für einen Schrank 47 ℳ 10 ₰. Wie viel hat er täglich verdient, wenn er 4 Tage daran arbeitete, für 14 ℳ 40 ₰ Bretter verbrauchte und für Schlosserarbeit u. dgl. noch 4 ℳ 50 ₰ Auslagen hatte?

11) Bei einem unregelmäßigen Fünfecke mißt 1 Seite 1 m 35 cm, die andere 1 m 12 cm, die dritte 1 m 52 cm, die vierte 1 m 87 cm, die fünfte 1 m 96 cm. Wie groß ist der Umfang des Fünfeckes?

12) Ein Mann starb und hinterließ seiner Frau und 4 Kindern ein Vermögen von 21000 ℳ. Den Armen vermachte er 300 ℳ und die Mutter erhielt einen Kindsteil und noch 800 ℳ. Wie viel erhält a) jedes Kind b) die Mutter?

13) Eine Gemeinde hat eine Schuld von 14600 ℳ. Sie verkauft zur Bezahlung derselben aus der Gemeindewaldung 175 Eichen, jede durchschnittlich zu 54 ℳ, 85 Ster Buchenholz à 12 ℳ und 70 Ster Fichtenholz à 9 ℳ. Wie viel bares Geld muß noch daraufbezahlt werden?

14) Ein Grundstück, welches 1 ha 4 a 64 qm mißt, soll als Bauplätze, von welchen jeder 2 a 18 qm groß ist, verkauft werden. Wie viele solche Bauplätze gibt es und wie hoch kommt einer davon zu stehen, wenn für 1 qm durchschnittlich 1 ℳ 45 ₰ bezahlt wird?

15) 12 Holzhändler haben das aufgemachte Holz eines Gemeindewaldes, welches in 33722 cbm 744 cdm und 814 ccm besteht gemeinschaftlich übernommen. Wie viel erhält ein jeder?

16) Jemand hat folgende Geldsorten: 936 Reichsthaler à 3 ℳ, 311 Zwanzigmarkstücke, 195 Zehnmarkstücke, 345 französische Fünffrankenstücke à 4 ℳ, 370 öst. Gulden à 2 ℳ und 41 frs à 80 ₰. Wie viel besitzt er in ℳ und ₰ D. R. W. ausgedrückt?

17) Jemand muß für vierteljährige Miethe 540 ℳ 60 ₰ bezahlen; derselbe bezahlte bereits 6487 ℳ 20 ₰. Wie lange bewohnt er schon das Haus?

18) Ein Mann hatte am 27. Sept. 1874 Geld ausgeliehen und dasselbe am 5. März 1883 wieder zurückerhalten. Wie lange war dieses Geld auf Zinsen gestanden?

19) Zu einem Bau hat jemand 18 Maurer 15 Wochen lang, 14 Zimmerleute 11 Wochen 4 Tage lang und 12 Schreiner 12 Wochen 5 Tage lang nötig gehabt; jeder Maurer erhält täglich 2 ℳ 80 ₰, jeder Zimmermann 3 ℳ 20 ₰ und jeder Schreiner 3 ℳ 45 ₰. Was kostet der Bau ohne Baumaterial?

20) Zur Tilgung einer Schuld verwendet jemand 7 Stück Pfandbriefe, deren Werth pro Stück 95 ℳ 60 ₰ ist, ferner 3 Doppelkronen, 8 Kronen und an Scheidemünze 5 ℳ 80 ₰. Wie groß war die Schuldsumme?

21) Jemand besitzt 4 verschiedene Geldsorten: 10 $, 20 R°S, 15 £ und 57 fl. ö. W. Wie viel besitzt dieser Mann in D. R. W.?

22) Eine Ware wog Brutto 7 Ctr 27 ℔ 150 g, während das Netto-Gewicht 4 Ctr 69 ℔ 275 g betrug. Wie groß war die Tara?

23) Ein Kaufmann kaufte von einer Waare 57 kg à 6 ℳ 50 ₰, 48 kg à 6 ℳ 25 ₰, 95 kg à 6 ℳ 90 ₰. Wie teuer kaufte er im Durchschnitt das kg ein?

24) Ein Acker hat die Gestalt eines Rechteckes. Er ist 80 m 5 dm lang und 24 m 4 dm breit; das qm wird auf 4 ℳ 50 ₰ gerechnet. Wie viel ℳ kostet der Acker?

25) Wie groß ist die Länge eines rechteckigen Ackerstückes von 12 ha Inhalt, wenn die Breite desselben 120 m beträgt?

26) Ein rechtwinkelig behauener Stein ist 3 m 2 dm lang, 1 m

4 dm breit, 2 m 5 dm hoch. a) Wie groß ist seine Oberfläche, b) wie groß ist sein Kubikinhalt?

27) Man bezieht 83 hl Wein und zahlt einschließlich der Fracht von 2 frs 75 cs per hl im ganzen 12678 frs 25 cs. Wie hoch kommt 1 hl ohne Fracht?

28) Wenn 1 kgr Soda 6 Hgr 2 Dgr 8 gr 5 mgr Wasser enthält, wie viel wasserfreie Soda ist sodann in 60 Pfund käuflicher Soda enthalten?

29) Man kauft 33 hl Wein à 77 ℳ und zahlt für Fracht 24 ℳ 75 ₰; durch Unvorsichtigkeit laufen beim Transporte 5 hl aus. Wenn man trotzdem beim Verkaufe des übrigen Weines 80 ℳ 25 ₰ gewinnen will, wie teuer muß ein hl verkauft werden?

30) 5000 ℳ sind unter 3 Personen A, B, C so zu verteilen, daß B um 500 ℳ mehr als A und C um 1000 ℳ mehr als B erhält. Wie viel erhält jeder?

31) 8000 frs sind unter 3 Personen A, B, C so zu verteilen, daß B um 600 frs weniger erhält als A und C um 2600 frs mehr als A. Wie viel erhält jede Person?

32) Drei arme talentvolle Schüler erhalten eine jährliche Unterstützung von 300 fl. ö. W., der zweite erhält um 30 fl. weniger als der erste, der dritte um 30 fl. weniger als der zweite. Wie viel erhält jeder Schüler?

33) 10000 ℳ sind unter 4 Personen so zu verteilen, daß A 10 ℳ mehr als B, C 10 ℳ mehr als B und D 10 ℳ weniger als A erhält. Was erhält jede Person?

34) A kauft von B 168 kg 5 Dg einer Ware, 1 g zu 2 cs und von einer andern Ware 74 kg 3 Hg 9 g und zahlt dafür zusammen 5590 frs 27 cs. Wie hoch ist 1 kg der zweiten Sorte berechnet?

35) Eine Petroleumlampe brennt mit 1 ℔ Petroleum, welches 20 ₰ kostet, 10 Stunden lang. Was kostet die Beleuchtung per Stunde? Was für 6 Wintermonate, wenn die Lampe täglich durchschnittlich 2 Stunden brennt?

36) 3 Weinhändler lassen sich 150 hl Wein kommen und müssen hiefür 5174 ℳ bezahlen. A nimmt hievon den 4. Teil, B vom Reste die Hälfte und C das Uebrige. Wie viel hat jeder zu bezahlen?

37) Ein Wirt kauft 24 hl Wein um 1295 ℳ 50 ₰ und zahlt für Fuhrlohn und andere Kosten 24 ℳ 50 ₰. Wie teuer muß er den Liter ausschenken, wenn er bei jedem Liter 10 ₰ gewinnen will?

38) Ludwig der Baier gelangte am 20. Oktober 1314 auf den deutschen Kaiserthron und starb den 11. Oktober 1347. Wie lange regierte er?

39) Friedrich v. Schiller wurde geboren den 10. November 1759 und erreichte ein Alter von 45 Jahren 5 Monaten und 29 Tagen. Wann starb er?

40) Der Dichter Klopstock starb am 14. März 1803 in einem Alter von 78 Jahren 8 Monaten und 12 Tagen. Wann wurde er geboren?

41) Wenn während eines Tages nach gleichen Zeiträumen der Thermometer nach Réaumur folgende Wärmegrade zeigt: 6°, 8°, 10°, 13°, 18°, 17°, 14°, 11° und 7°. Welches ist der mittlere Thermometerstand?

42) Wenn der Barometer nach gleichen Zeiten während des Monats folgende Höhen in Millimetern zeigt: 755, 754, 756, 758, 757, 759, 758, 760, 762 und 759. Welches ist der mittlere Barometerstand?

43) Jemand kauft 48 Flaschen Wein à 75 ₰, 70 Flaschen à 80 ₰, 10 Flaschen à 105 ₰ und 75 Flaschen à 100 ₰. Welches ist der Durchschnittspreis einer Flasche?

44) Ein Oekonom bringt zur Schranne 175 hl Korn, 250 hl Weizen, 236 hl Gerste und 84 hl Hafer. Er verkauft das hl Korn um 10 ℳ 70 ₰, Weizen um 20 ℳ 50 ₰, Gerste um 9 ℳ 80 ₰ und Hafer um 6 ℳ 40 ₰. Wie groß ist der Durchschnittserlös pro Hektoliter?

45) Das N^{tto} Gewicht einer Ware ist 229 kg, die T^{a} 12 kg 270 g wie groß ist das B^{tto} Gewicht?

46) Jemand hat monatlich 350 ℳ. Wie viel darf er von seinem Gehalte jährlich brauchen, wenn er am Schlusse des Kalenderjahres 400 ℳ erübrigen will?

47) Ein rechteckiges Grundstück von 1 km 250 m Länge und 750 m Breite kostet 48750 ℳ. Wie hoch kommt 1 a?

48) Ein Bauplatz hat eine Länge von 47 m 50 cm und eine Breite von 32 m 8 cm. Welchen Wert hat derselbe, wenn 1 qm 6 ℳ 50 ₰ kostet?

49) Ein Bierbrauer hinterläßt bei seinem Tode 12600 ℳ an barem Gelde, 60000 ℳ beträgt der Wert an Immobilien, 5300 ℳ an Mobilien. Die noch vorhandenen Rohstoffe repräsentieren einen Wert von 1970 ℳ. Außerdem findet sich noch ein Wechsel von 1200 ℳ und 7 Staatspapiere à 1000 ℳ vor. Ferner stehen noch laut Ausweis seiner Geschäftsbücher auf verschiedenen Posten 11500 ℳ aus. Auf seinem Anwesen lasten 2 Hypotheken und zwar die erste im Betrage von 10000 ℳ, die zweite im Betrage von 9000 ℳ. Seine Currentschulden belaufen sich auf 17000 ℳ. Wie hoch beläuft sich a) das Aktiv-, b) das Passiv-, c) das Netto- oder reine Vermögen dieses Mannes?

50) Zu einer Zahlung in London braucht man 245 Imp. à 16 ℳ 65 ₰ und überdies 11 ℳ 10 ₰. Wie viele £ à 20 ℳ 35 ₰ wären hiezu nötig?

4. Teilbarkeit der Zahlen.

1. Erklärungen.

Eine ganze Zahl heißt durch eine andere **teilbar**, wenn die letztere in der ersten **ohne Rest** enthalten ist, die Division also eine **ganze Zahl** als Quotienten gibt.

Eine ganze Zahl, welche **in einer andern ohne Rest** enthalten ist, heißt ein **Teiler** oder ein **Maß** dieser Zahl.

Eine **ganze Zahl, in welcher eine andere ohne Rest** enthalten ist, wird ein **Vielfaches** (Dividuus) dieser Zahl genannt.

Jede Zahl hat 1 und sich selbst zum Maße, d. h. jede Zahl ist durch 1 und durch sich selbst teilbar.

Die Zahlen, welche n u r 1 und sich selbst zum Maße haben, heißen **absolute Primzahlen (Primzahlen an und für sich)** z. B. 1, 3, 5, 7, 19 ꝛc.

Im Gegensatze zu diesen werden die Zahlen, welche auch andere Zahlen zum Maße haben, **zusammengesetzte Zahlen** genannt, z. B. 4, 6, 8, 9, 16, 24.

Die einfachen Faktoren, in welche jede zusammengesetzte Zahl zerlegt werden kann, heißen **Primfaktoren.**

Je zwei ganze Zahlen haben immer 1 zum gemeinschaftlichen Maße.

Zwei oder mehrere Zahlen, welche nur 1 zum gemeinschaftlichen Maße haben, werden **relative Primzahlen (Primzahlen unter sich)** genannt.

Z. B. 7 u. 18; 6, 17 u. 49.

Anm. Zwei aufeinanderfolgende Zahlen sind immer Primzahlen unter sich z. B. 6 u. 7, 10 u. 11, 17 u 18, 15 u. 16.

2. Kennzeichen der Teilbarkeit.

1) Eine Zahl ist durch 2, 4, 8, 16 ꝛc. teilbar, wenn ihre eine zwei, drei, vier letzten Stellen, als Zahlen für sich betrachtet, beziehungsweise Vielfache von 2, 4, 8, 16 ꝛc. sind.

Es ist z. B. 34 durch 2 teilbar, weil 4 durch 2 teilbar ist; 348 durch 4, weil 48 : 4 = 12 ist; 3488 durch 8, weil 488 ein Vielfaches von 8 ist; 32576 durch 16, weil 2576 ein Vielfaches von 16 ist (2576 : 16 = 161).

2) Eine Zahl ist durch 3 oder 9 teilbar, wenn die Quersumme ihrer Ziffern ein Vielfaches von 3 oder 9 ist.
z. B. 285 durch 3 teilbar, weil (2 + 8 + 5) : 3 = 15 : 3 = 5 ist.
70425 ist durch 9 teilbar, weil (7 + 0 + 4 + 2 + 5) : 9 = 18 : 9 = 2 ist.

3) Eine Zahl ist durch 5, 25, 125 u. s. w. teilbar, wenn bezüglich ihre ein, zwei, drei ꝛc. letzten Stellen, als Zahlen für sich betrachtet, entweder 0, 00, 000, oder ein Vielfaches von 5, 25, 125 u. s. w. sind.

Z. B. 105 ist durch 5 teilbar 5 : 5 = 1.
30875 ist durch 25 teilbar, weil 75 : 25 = 3.
90625 ist durch 125 teilbar, weil 625 : 125 = 5.

4) Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar ist; sie ist durch 12 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar ist, sie ist durch 15 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar ist; durch 18 ist eine Zahl teilbar, wenn sie durch 2 und ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Es ist z. B. 912 durch 6 teilbar, weil sie durch 2 und 3 teilbar ist; 1224 ist durch 12 teilbar, weil sie durch 3 und 4 teilbar ist. 90 ist durch 15 teilbar, weil sie durch 3 und 5 teilbar ist. 126 ist durch 18 teilbar, weil sie durch 2 und ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

5) Eine Zahl ist durch 10, 100, 1000 u. s. w. teilbar, wenn ihre ein, zwei, drei u. s. w. letzten Stellen aus 0 bestehen.

6) Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz aus der Summe ihrer ungeraden Stellen und aus der Summe ihrer geraden entweder 0 oder 11 oder ein Vielfaches von 11 ist.

Z. B. 92543 ist durch 11 teilbar, denn $(9 + 5 + 3) - (2 + 4) = 17 - 6 = 11$.

705958 ist durch 11 teilbar, denn $(7 + 5 + 5) - (0 + 9 + 8) = 17 - 17 = 0$.

3. Zerlegung in Primfaktoren.

Soll eine zusammengesetzte Zahl in Primfaktoren zerlegt werden, so dividiert man zunächst mit der kleinsten Primzahl, die zugleich Teiler ist, in die gegebene Zahl, den so gefundenen Quotienten dividiert man abermals durch seinen kleinsten Primteiler und fährt so fort, bis sich der letzte Quotient als eine Primzahl ergibt.

Die so gefundenen Primteiler sind die Primfaktoren der gegebenen zusammengesetzten Zahl.

Z. B.

$$\begin{aligned} 4620 : 2 &= 2310 \\ 2310 : 2 &= 1155 \\ 1155 : 3 &= 385 \\ 385 : 5 &= 77 \\ 77 : 7 &= 11 \\ 11 : 11 &= 1 \end{aligned}$$

$$4620 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$$

oder

$$\begin{aligned} 4620 &= 2 \,.\, 2310 \\ &= 2 \,.\, 2 \,.\, 1155 \\ &= 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 385 \\ &= 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 \\ &= 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{array}{r|l} 4620 & 2 \\ 2310 & 2 \\ 1155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$4620 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11.$$

Viele Zahlen geben bei ihrer Zerlegung nur gleiche Primfaktoren.

Z. B. $64 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2$

$2401 = 7 . 7 . 7 . 7$

Solche aus gleichen Faktoren bestehenden Produkte nennt man, wie schon früher bemerkt, **Potenzen;** der **gleiche Faktor** heißt **Grundzahl (Basis)** und die **Anzahl der gleichen Faktoren** heißt **Exponent.**

$3 . 3 . 3 . 3 = 3^4$ (ausgesprochen 3 hoch 4 oder 3 in der 4. Potenz).

In der **Potenz** 3^4 ist 3 die **Grundzahl (Basis),** 4 der **Exponent.**

Wenn zusammengesetzte Zahlen aus gleichen und ungleichen Primfaktoren bestehen, so schreibt man die gleichen Faktoren gewöhnlich als Potenzen.

Z. B.

$14850 : 2 = 7425$
$7425 : 3 = 2475$
$2475 : 3 = 825$
$825 : 5 = 165$
$165 : 5 = 33$
$33 : 3 = 11$
$11 : 11 = 1$

$14850 = 2 . 3 . 3 . 3 . 5 . 5 . 11$
$= 2 . 3^3 . 5^2 . 11$

oder einfacher

$14850 : 2$
$7425 : 3$
$2475 : 3$
$825 : 5$
$165 : 5$
$33 : 3$
$11 : 11$
1

$11850 = 2 . 3 . 3 . 3 . 5 . 5 . 11$
$= 2 . 3^3 . 5^2 . 11.$

Fragen und Aufgaben.

1) Was ist über die Teilbarkeit der Zahlen anzugeben?
2) Was ist eine Potenz?
3) Was versteht man unter absoluten und relativen Primzahlen?

4) Zerleget folgende Zahlen in ihre Primfaktoren:
360; 648; 756; 936; 1071; 1540; 1575; 1728; 15552; 115248; 3315; 30075; 3185; 30295; 109494.

5) Schreibet folgende Produkte als Potenzen an:
a) 2 . 2 . 2 . 2
b) 3 . 3 . 3
c) 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2
d) 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2
e) 3 . 3 . 3 . 3 . 3
f) 5 . 5
g) 5 . 5 . 5 . 5
h) 7 . 7 . 7
i) 4 . 4 . 4 . 4
k) 6 . 6 . 6

6) Berechnet den Wert folgender Potenzen:
a) 2^6, b) 3^4, c) 4^4, d) 5^3, e) 2^3, f) 3^2, g) 5^4, h) 4^5, i) 10^2, k) 2^{10}, l) 3^6, m) 6^3, n) 2^8, o) 3^7, p) 6^6, q) beachte, daß nur $2^4 = 4^3$.

7) Berechnet folgende Produkte:

a) $2^3 . 3^2 . 5^2 . 7$
b) $2^5 . 3 . 5^3$
c) $3^4 . 5^2 . 7^2$
d) $2 . 3^3 . 5^5$
e) $2^8 . 3^2 . 7^3$
f) $5 . 11^3 . 13 . 17$
g) $3^2 . 5^3 . 11^3 . 13^2$
h) $2^2 . 3^3 . 5^5$.

4. Der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor.

Unter dem größten gemeinschaftlichen Teiler oder Divisor zweier oder mehrerer Zahlen versteht man jene größte Zahl, welche in den gegebenen Zahlen ohne Rest enthalten ist.

Dieser größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor kann auf dreierlei Art gefunden werden:

1) durch Zerfällung in ihre Primfaktoren,
2) durch Division,
3) durch eine Vereinigung beider Verfahrungsweisen.

1) **Der größte gemeinschaftliche Teiler** oder **Divisor** für zwei oder mehrere Zahlen wird gefunden, wenn man die **Zahl** in ihre **Primfaktoren** zerlegt.

Das Produkt der gemeinschaftlichen Primfaktoren ist der größte Teiler (Divisor) oder das größte gemeinschaftliche Maß.

Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor der beiden Zahlen 816 und 912?

$$\begin{array}{rcrcr} 816 & : & 2 & = & 408 \\ 408 & : & 2 & = & 204 \\ 204 & : & 2 & = & 102 \\ 102 & : & 2 & = & 51 \\ 51 & : & 3 & = & 17 \\ 17 & : & 17 & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 912 & : & 2 & = & 456 \\ 456 & : & 2 & = & 228 \\ 228 & : & 2 & = & 114 \\ 114 & : & 2 & = & 57 \\ 57 & : & 3 & = & 19 \\ 19 & : & 19 & = & 1 \end{array}$$

$$816 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 17 \qquad 912 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 19$$

oder

$$\begin{aligned} 816 &= 2 . 408 \\ &= 2 . 2 . 204 \\ &= 2 . 2 . 2 . 102 \\ &= 2 . 2 . 2 . 2 . 51 \\ &= 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 17 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 912 &= 2 . 456 \\ &= 2 . 2 . 228 \\ &= 2 . 2 . 2 . 114 \\ &= 2 . 2 . 2 . 2 . 57 \\ &= 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 19 \end{aligned}$$

Beide Zahlen 816 und 912 haben folgende Primfaktoren gemeinschaftlich:

$$2 . 2 . 2 . 2 . 3 = 48$$

48 ist also der **größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor** der beiden Zahlen 816 und 912.

Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler (Divisor) der Zahlen 360, 240, 540, 600?

1. Art. Durch Zerfällung in ihre Primfaktoren.

$$\begin{array}{rcrcr} 360 & : & 2 & = & 180 \\ 180 & : & 2 & = & 90 \\ 90 & : & 2 & = & 45 \\ 45 & : & 3 & = & 15 \\ 15 & : & 3 & = & 5 \\ 5 & : & 5 & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 240 & : & 2 & = & 120 \\ 120 & : & 2 & = & 60 \\ 60 & : & 2 & = & 30 \\ 30 & : & 2 & = & 15 \\ 15 & : & 3 & = & 5 \\ 5 & : & 5 & = & 1 \end{array}$$

$$360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 2^3 . 3^2 . 5 \qquad 240 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 2^4 . 3 . 5$$

$$\begin{array}{rcrcr} 540 & : & 2 & = & 270 \\ 270 & : & 2 & = & 135 \\ 135 & : & 3 & = & 45 \\ 45 & : & 3 & = & 15 \\ 15 & : & 3 & = & 5 \\ 5 & : & 5 & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 600 & : & 2 & = & 300 \\ 300 & : & 2 & = & 150 \\ 150 & : & 2 & = & 75 \\ 75 & : & 3 & = & 25 \\ 25 & : & 5 & = & 5 \\ 5 & : & 5 & = & 1 \end{array}$$

$$540 = 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 = 2^2 . 3^3 . 5 \qquad 600 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 5 = 2^3 . 3 . 5^2$$

Die Zahlen haben folgende Primfaktoren gemeinschaftlich:

$$2^2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 60.$$

Anm. Der größte gemeinschaftliche Teiler oder Divisor ist das Produkt der niedrigsten Potenzen der gemeinschaftlichen Zahlen.

2. Art. Durch Division.

Um den **größten gemeinschaftlichen Teiler (Divisor)** zweier Zahlen zu finden, dividiert man die größere Zahl durch die kleinere und dann den Divisor durch den jedesmaligen Rest. **Der letzte Divisor ist alsdann der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen.**

Bleibt 1 als Rest, so sind die Zahlen Primzahlen unter sich, d. h. die Zahlen haben keinen gemeinschaftlichen Divisor.

Z. B. Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen 816 und 912?

912 : 816 = 1
816
816 : 96 = 8
768
96 : 48 = 2
96 —
- -

Der **größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen** 816 und 912 ist 48.

Soll zu mehr als zu zwei Zahlen der größte gemeinschaftliche Teiler gesucht werden, so sucht man denselben zunächst von irgend zwei der gegebenen Zahlen, hierauf von dem eben gefundenen Teiler und einer dritten Zahl u. s. w. bis zur letzten der gegebenen Zahlen. **Der zuletzt gefundene Divisor ist dann der größte gemeinschaftliche Teiler für sämmtliche Zahlen.**

Z. B. Welches ist der größte gemeinschaftliche Teiler für die Zahlen 360, 240, 540, 600?

360 : 240 = 540 : 120 = 4
240 : 120 = 2 120 : 60 = 2
0 0
600 : 60 = 10

60 ist also der **größte gemeinschaftliche Teiler** dieser 4 Zahlen.

3. Art. Wenn sich bei kleineren Zahlen die gemeinschaftlichen Faktoren sogleich erkennen lassen, so scheidet man diese aus und dividiert durch sie die vorliegenden Zahlen. Sind sämmtliche Quotienten relative

Primzahlen, so ist das **Produkt der ausgeschiedenen Faktoren der gesuchte größte gemeinschaftliche Teiler.**

Z. B.

	360, 240, 540, 600
2	180, 120, 270, 300
2	90, 60, 135, 150
3	30, 20, 45, 50
5	6, 4, 9, 10

2 . 2 . 3 . 5 = 60 **ist der größte gemeinschaftliche Teiler.**

Fragen und Aufgaben.

1) Was versteht man unter dem größten gemeinschaftlichen Teiler zweier oder mehrerer Zahlen?
2) Auf welche Art kann derselbe gefunden werden?
3) Wo findet im praktischen Leben der größte gemeinschaftliche Teiler seine Anwendung?
4) Man suche den größten gemeinschaftlichen Teiler (Divisor) für folgende Zahlengruppen:

a) 252 und 396
b) 945 und 2295
c) 576 und 1080
d) 1215 und 2106
e) 2604 und 3444
f) 2376 und 2808
g) 3528 und 5544
h) 3696 und 6468
i) 6804 und 9072
k) 11664 und 27216
l) 17496 und 63504
m) 2379375 und 3695625
n) 1528 und 7067
o) 3276 und 5733
p) 2062236 und 3083245
q) 72, 108, 216, 252, 396, 504, 612, 936.
r) 112, 176, 304, 432, 512, 528, 784, 848.

5. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier oder mehrerer Zahlen versteht man jene kleinste Zahl, in welcher alle gegebenen Zahlen ohne Rest enthalten sind.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache kann auf folgende Weise gefunden werden.

1. Art. Man zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren und nehme jeden Primfaktor so oft als Faktor in das gemeinschaftliche Vielfache auf, als

er in derjenigen Zahl enthalten ist, in welcher er am öftersten vorkommt.

Die Zahlen, welche in einer andern enthalten sind, streiche man weg.

Z. B. Man suche für folgende Zahlen: 5, 8, 15, 24, 30 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

~~5~~ ~~8~~ ~~15~~ 24 30

24 = 2 . 2 . 2 . 3   Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache

30 = 2 . 3 . 5   2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 120

2. Art. Auch durch folgende Regel kann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache gesucht werden.

a) Streiche diejenigen Zahlen weg, welche in der andern ohne Rest enthalten sind.

b) Suche hierauf die gemeinschaftlichen Teiler von zwei oder mehreren übrigen Zahlen heraus, dividiere durch dieselben und fahre damit so lange fort, bis die erhaltenen Quotienten und die nicht teilbaren Zahlen relative Primzahlen sind.

c) Multipliciere die herausgestellten gemeinschaftlichen Faktoren mit den relativen Primzahlen. **Das erhaltene Produkt** ist das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache.**

Z. B. 1) 5, 8, 15, 24, 30.

	~~5~~,	~~8~~,	~~15~~,	24,	30
2				12,	15
3				4,	5

Das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** ist 2 . 3 . 4 . 4 = 120

2) Man suche für folgende Zahlen: 15, 21, 28, 40, 48 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

	15,	21,	28,	40,	48
2	15,	21,	14,	20,	24
2	15,	21,	7,	10,	12
2	15,	21,	7,	5,	6
3	5,	~~7~~,	7,	~~5~~,	2
	5,		7,		2

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist

= 2 . 2 . 2 . 3 . 5 . 7 . 2 = 1680.

Fragen und Aufgaben.

1) Was versteht man unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier oder mehrerer Zahlen?

2) Wie findet man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache?

3) Wo findet dasselbe im praktischen Leben seine Anwendung?

4) Man suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache für folgende Zahlengruppen:

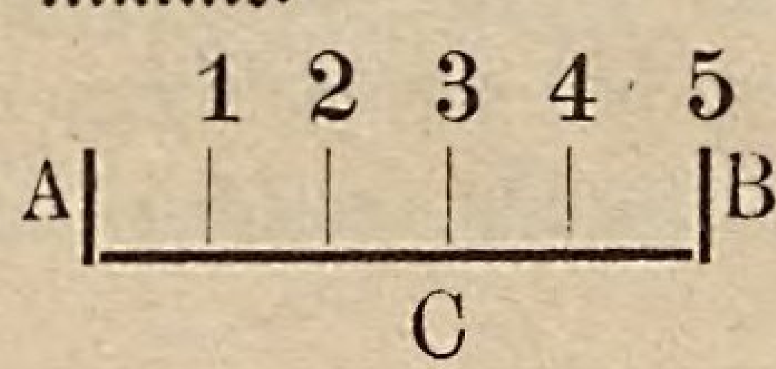
1) 24, 30, 36
2) 4, 6, 10, 12
3) 6, 15, 21, 35, 120
4) 13, 17
5) 4, 18, 15
6) 35, 21, 7, 36
7) 30, 42, 70, 105
8) 36, 48, 32, 45, 80
9) 15, 25, 6, 14, 12
10) 15, 3, 8, 14, 9, 12, 21
11) 7, 12, 14, 18, 21, 24, 30
12) 18, 27, 36, 42, 54, 72
13) 3, 5, 6, 10, 12, 15, 18, 25
14) 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16
15) 30, 42, 45, 60, 75, 80.

5. Die gemeinen Brüche.

1. Erklärungen.

Ein **Bruch** entsteht dadurch, daß man **irgend ein Ganzes** z. B. **die Linie A B in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile teilt und davon einen oder mehrere nimmt.**

Z. B. $\frac{3}{5}$ entsteht dadurch, daß man die Einheit in fünf gleiche Teile teilt und 3 davon nimmt.

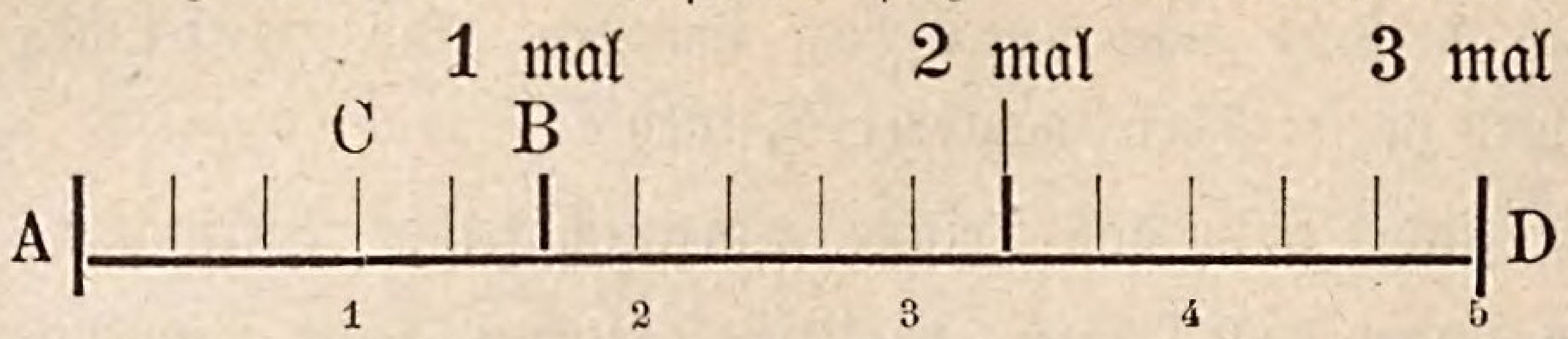


$AB = 1$
$AC = \frac{3}{5}$

Die Zahl 5 gibt an, in wie viele Teile das Ganze geteilt wurde, und heißt der **Nenner** des Bruches, die Zahl 3 sagt uns, wie viele **Teile** hievon genommen wurden; sie heißt der **Zähler** des Bruches.

Nach einer andern Vorstellungsweise können wir auch sagen $\frac{3}{5}$ ist der 5. Teil von 3. Wenn wir nämlich die Länge A B, die Einheit, 3 mal aneinander tragen und jede Einheit in 5 gleiche Teile teilen, so enthält A C 3 und A D 15 gleiche Teile, folglich läßt sich A C

auf AD 5 mal auftragen, also ist AC der 5. Teil von AD; nun ist aber AC = $\frac{3}{5}$ und AD = 3, somit ist $\frac{3}{5}$ = der 5. Teil von 3 oder 3 : 5



Man sieht aus dieser zweiten Entstehungsweise, daß **ein Bruch** nichts anderes sei, als ein **formeller Quotient**, dessen **Dividend** der **Zähler** und dessen **Divisor** der **Nenner** ist, und daß deshalb die Sätze für formelle Quotienten nun auch für Brüche gelten.

Da beim Dividieren der Dividend geteilt oder gebrochen wird, so hat der **Quotient** auch den Namen **gebrochene Zahl** oder **Bruch**.

Der **Dividend** heißt dann **Zähler**, weil er die Teile zählt, der **Divisor** dagegen **Nenner**, da von ihm die Teile ihre Benennung erhalten. Statt der Divisionspunkte (:) bedient man sich eines von links nach rechts gerichteten Striches (—), über welchen der Zähler und unter den der Nenner geschrieben wird.

Anm. Jeder Bruch gibt also mit seinem Nenner multipliciert, seinen Zähler. Z. B. $\frac{5}{8} \cdot 8 = 5$.

Ein Bruch, dessen Zähler größer ist als der Nenner oder größer als 1, heißt ein **unechter Bruch**. Z. B. $\frac{12}{7}$.

Ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als der Nenner oder kleiner als 1, heißt ein **echter Bruch**. Z. B. $\frac{7}{12}$.

Eine **ganze Zahl mit einem echten Bruche** heißt eine **gemischte Zahl**. Z. B. $1\frac{5}{12} = 1 + \frac{5}{12}$.

Jeder **unechte** Bruch kann in eine **gemischte Zahl** verwandelt werden.

Die ganze Zahl ist der bei der Division gefundene Quotient.

Der Rest ist ein echter Bruch, welcher den Nenner des unechten Bruches als Nenner hat.

Anm. Das Additionszeichen läßt man bei gemischten Zahlen gewöhnlich weg.

Umgekehrt kann man jede **gemischte Zahl** in einen **unechten** Bruch verwandeln, dessen Zähler erhalten wird, wenn man zum Produkte aus der ganzen Zahl und dem Nenner des beigefügten Bruches den Zähler des Bruches addiert.

Z. B. $$7\frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{31}{4}$$

$$17\frac{5}{12} = \frac{17 \cdot 12 + 5}{12} = \frac{204 + 5}{12} = \frac{209}{12}$$

Ein Bruch heißt ein **uneigentlicher**, wenn der Zähler gleich dem Nenner oder ein Vielfaches desselben, **der Wert des Bruches** also eine **ganze Zahl** ist.

Z. B. $\frac{4}{4} = 1$ $\frac{21}{7} = 3.$

Jede ganze Zahl läßt sich also in einen **uneigentlichen** Bruch verwandeln, dessen Zähler so oft durch den Nenner teilbar ist als die ganze Zahl angibt.

Z. B. $1 = \frac{4}{4}$ $3 = \frac{21}{7}$

$2 = \frac{6}{3}$ $4 = \frac{24}{6}$

$7 = \frac{63}{9} = \frac{28}{4}$

Anm. Jede Zahl läßt sich als ein Bruch betrachten, dessen Nenner 1 ist.

Z. B. $7 = \frac{7}{1}$ $6 = \frac{6}{1}$

Von mehreren Brüchen, welche **gleiche Nenner** haben, ist derjenige der **größte, der den größten Zähler** hat.

Z. B. von $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{9}{7}, \frac{14}{7}$ ist $\frac{14}{7}$ der **größte Bruch.**

Von mehreren Brüchen mit demselben Zähler ist derjenige **der größte,** der den **kleinsten Nenner** hat.

Z. B. von $\frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{5}{7}, \frac{5}{12}$ ist $\frac{5}{2}$ **der größte Bruch.**

Anm. Wann wird der Wert eines Bruches vergrößert, wann verkleinert?

Ein Bruch bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl

a) multipliciert oder

b) dividiert.

Z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3 \,.\, 7}{4 \,.\, 7} = \frac{21}{28}$

$\frac{5}{7} = \frac{5 \,.\, 3}{7 \,.\, 3} = \frac{15}{21}$

$\frac{14}{36} = \frac{14 : 2}{36 : 2} = \frac{7}{18}$

$\frac{36}{48} = \frac{36 : 6}{48 \,.\, 6} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}$

(Anm. Der Beweis bleibt dem Unterrichte vorbehalten.)

Die erste dieser Veränderung heißt **Erweiterung**, die zweite **Verkleinerung** (Reducierung) der Brüche.

Wenn Zähler und Nenner eines Bruches einen gemeinschaftlichen Teiler haben, so läßt sich dieser Bruch, ohne seinen Wert zu ändern, auf eine einfachere Form bringen oder vereinfachen, indem man Zähler und Nenner durch einen gemeinschaftlichen Teiler dividiert.

Sind Zähler und Nenner relative Primzahlen, so ist eine weitere Vereinfachung nicht mehr möglich.

Z. B. $\frac{32}{48} = \frac{2 \,.\, 16}{3 \,.\, 16} = \frac{2}{3}$

$\frac{133}{209} = \frac{133 : 19}{209 : 19} = \frac{7}{11}$

Sollen Brüche mit einander verglichen werden, welche verschiedene Nenner haben, so verwandelt man dieselben in Brüche mit gleichen Nennern oder macht dieselben **gleichnamig.**

Dies wird dadurch bewerkstelligt, daß man zu den Nennern der gegebenen Brüche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache sucht, welches der **gemeinschaftliche** oder **Hauptnenner (Generalnenner)** sämmtlicher Brüche wird.

Die hiezu gehörigen Zähler findet man, wenn man den Hauptnenner durch jeden Nenner dividiert und mit diesen Quotienten die Zähler der einzelnen Brüche multipliciert.

Bei diesem Verfahren geschieht also nichts anderes, als daß Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert werden.

Folgende Brüche sollen auf gleiche Benennung gebracht werden:

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{13}{15}, \frac{11}{18}$

	2,	4,	10,	15,	18
2		2,	5,	15,	9
3		2,		5,	3
		2,		5,	3

2 . 3 . 2 . 5 . 3 = 180 **ist der gemeinschaftliche Nenner oder Hauptnenner.**

$\frac{1}{2} = \frac{1 \,.\, 90}{2 \,.\, 90} = \frac{90}{180}$ $\frac{3}{4} = \frac{3 \,.\, 45}{4 \,.\, 45} = \frac{135}{180}$

$\frac{7}{10} = \frac{7 \,.\, 18}{10 \,.\, 18} = \frac{126}{180}$ $\frac{13}{15} = \frac{13 \,.\, 12}{15 \,.\, 12} = \frac{156}{180}$

$\frac{11}{18} = \frac{11 \,.\, 10}{18 \,.\, 10} = \frac{110}{180}$

Sind also die Brüche nach ihrer Größe zu ordnen, so hat man:

$\frac{156}{180} > \frac{135}{180} > \frac{126}{180} > \frac{110}{180} > \frac{90}{180}$

oder $\frac{13}{15} > \frac{3}{4} > \frac{7}{10} > \frac{11}{18} > \frac{1}{2}$

Fragen und Aufgaben.

1) Was ist ein Bruch?
2) Woraus besteht ein Bruch?
3) Wie werden die Brüche eingeteilt?
4) Wie wird eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch und umgekehrt ein unechter Bruch in eine gemischte Zahl verwandelt?
5) Welcher von mehreren Brüchen, welche gleichen Nenner haben, ist der größte und welcher, wenn sie gleiche Zähler haben?
6) Wann bleibt ein Bruch seinem Werte nach unverändert?
7) Welche Veränderung der Brüche nennt man Erweiterung, welche Verkleinerung?
8) Man bringe folgende Brüche auf die einfachste Form:
a) $\frac{36}{54}$ b) $\frac{112}{128}$ c) $\frac{5491}{6137}$ d) $\frac{126}{225}$ e) $\frac{762}{1116}$ f) $\frac{378}{1026}$
g) $\frac{252}{324}$ h) $\frac{3200}{4480}$ i) $\frac{4508}{4704}$ k) $\frac{10659}{24871}$ l) $\frac{42517}{57523}$
9) Man verwandle folgende unechte Brüche in gemischte Zahlen:
a) $\frac{19}{4}$ b) $\frac{777}{10}$ c) $\frac{122}{12}$ d) $\frac{246}{13}$ e) $\frac{200}{27}$ f) $\frac{97}{50}$ g) $\frac{2000}{99}$
h) $\frac{652}{17}$ i) $\frac{37}{15}$ k) $\frac{12345}{1234}$
10) Man verwandle folgende gemischte Zahlen in unechte Brüche:
a) $7\frac{7}{12}$ b) $2\frac{1}{2}$ c) $19\frac{9}{14}$ d) $17\frac{13}{33}$ e) $8\frac{35}{36}$ f) $5\frac{21}{56}$
g) $99\frac{97}{100}$ h) $27\frac{111}{166}$
11) Welcher von den nachfolgenden Brüchen a) $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$, b) $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{11}{9}$, c) $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{6}$, d) $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{11}$, hat den kleinsten und welcher den größten Wert?
12) Man ordne folgende Brüche nach ihrem Werte und zwar einmal vom kleinsten und einmal vom größten angefangen:
a) $\frac{7}{20}$, $\frac{2}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{23}{20}$,
b) $\frac{22}{8}$, $\frac{22}{3}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{22}{15}$, $\frac{22}{21}$, $\frac{22}{5}$
13) Welcher von folgenden Brüchen hat den größten Wert und warum?. Wie reihen sich dieselben nach ihren Werten aneinander (vom größten angefangen)?
$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{27}{28}$, $\frac{19}{30}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{10}$

2. Addition der Brüche.

a) Brüche mit gleichen Nennern oder gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Summe ihrer Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert.

Z. B. $\frac{9}{4} + \frac{6}{9} + \frac{8}{9} = \frac{4 + 6 + 8}{9} = \frac{18}{9} = 2.$

b) Haben die Brüche verschiedene Nenner, so müssen dieselben zuvor gleichnamig gemacht werden und dann findet die vorhergehende Regel ihre Anwendung.

Z. B. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \frac{18 + 20 + 9 + 14}{24} = \frac{61}{24} = 2\frac{13}{24}$

4, 6, 8, 12
$8 = 2 . 2 . 2$
$12 = 2 . 2 . 3$

$2 . 2 . 2 . 3 = 24$ ist der gemeinschaftlichen Nenner (Haupt- oder Generalnenner).

c) Gemischte Zahlen werden addiert, wenn man zur Summe der ganzen Zahlen die Summe der echten Brüche addiert.

Z. B. 1) $9\frac{3}{4} + 12\frac{5}{6} + 8\frac{1}{3} + 15\frac{1}{2} + 1\frac{7}{12}$

$= 45 + \frac{9 + 10 + 4 + 6 + 7}{12}$

$= 45 + \frac{36}{12} = 45 + 3 = 48.$

2) $4\frac{7}{8} + 2\frac{1}{7} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + 6\frac{5}{14} + 8\frac{1}{6}$

$= 20 + \frac{147 + 24 + 70 + 56 + 60 + 28}{168}$

$= 20 + \frac{385}{168} = 20 + 2\frac{49}{168} = 22\frac{7}{24}$

	8,	7,	12,	3,	14,	6
2	4,		6,		7	
2	2,		3,		7	

General- oder Hauptnenner $2 . 2 . 2 . 3 . 7 = 168$

Fragen und Aufgaben.

1) Wie werden Brüche addiert?
2) Wann sind Brüche gleichnamig und wie werden sie gleichnamig gemacht?
3) Wie werden gemischte Zahlen addiert?

4) $\frac{8}{13} + \frac{9}{13} + \frac{7}{13} + \frac{4}{13} + \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{6}{13}$

5) $7\frac{5}{11} + 1\frac{9}{11} + 2\frac{8}{11}$

6) $\frac{3}{4} + \frac{7}{9} + \frac{5}{6} + \frac{13}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{2}$

7) $2\frac{3}{8} + 3\frac{5}{12} + 2\frac{7}{15} + 1\frac{1}{10} + \frac{19}{40} + \frac{1}{6}$

8) $4\frac{35}{150} + 1\frac{1}{2} + \frac{11}{35} + 3\frac{4}{15} + 2\frac{6}{20} + \frac{27}{70}$

9) $3\frac{2}{3} + 2\frac{1}{8} + 2\frac{5}{24} + \frac{27}{48} + 3\frac{7}{10} + \frac{7}{15} + \frac{13}{48}$

10) $2\frac{3}{5} + 4\frac{5}{14} + \frac{82}{252} + 2\frac{4}{9} + \frac{5}{12} + 7\frac{11}{21} + 5\frac{11}{15}$

11) $2\frac{7}{10} + 2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12} + \frac{11}{15} + 1\frac{7}{10}$

12) $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 1\frac{7}{8} + 3\frac{3}{16} + \frac{3}{16}$

13) $2\frac{1}{3} + 14\frac{3}{8} + 7\frac{4}{5} + 11\frac{5}{9}$

14) Ein Kaufmann nahm in den ersten sieben Monaten eines Jahres folgende Summen ein: $840\frac{1}{2}$ *M.*, $865\frac{3}{4}$ *M.*, $798\frac{1}{4}$ *M.*, $868\frac{4}{5}$ *M.*, $921\frac{3}{5}$ *M.*, $723\frac{9}{10}$ *M.*, $787\frac{11}{20}$ *M.* Wie groß war die Einnahme?

15) A hatte eine Ware für $106\frac{17}{20}$ *M.* eingekauft und wollte daran $20\frac{1}{5}$ *M.* gewinnen. Wie teuer mußte er die Ware verkaufen?

16) Jemand sah sich genötigt eine Ware mit $14\frac{3}{4}$ fl. ö. W. Verlust für $56\frac{3}{10}$ fl. zu verkaufen. Wie teuer hatte er die Ware eingekauft?

17) Das N<u>tto</u> Gewicht einer Ware betrug $407\frac{3}{10}$ kg, die T<u>a</u> betrug $28\frac{2}{5}$ kg. Wie groß ist das B<u>tto</u> Gewicht?

18) Ein Kaufmann bezahlte eine Ware für $175\frac{3}{4}$ *M.* Die Emballage und der Transport kosteten $25\frac{1}{2}$ *M.* Welches waren die Ausgaben des Kaufmannes?

19) Ein Getreidehändler kaufte auf drei Plätzen folgende Quantitäten: 2Ctr $30\frac{1}{2}$ kg, 15 Ctr $42\frac{3}{4}$ kg, 8 Ctr $7\frac{4}{5}$ kg. Wie viel kaufte er im ganzen?

20) Berechnet: a) $27\frac{1}{2}$ £ + $12\frac{3}{4}$ £ + $17\frac{5}{8}$ £ + $32\frac{4}{5}$ £ + $7\frac{1}{5}$ £.

b) $12\frac{5}{12}$ R⁰S + $32\frac{3}{4}$ R⁰S + $17\frac{5}{6}$ R⁰S + $8\frac{1}{2}$ R⁰S.

Subtraktion der Brüche.

a) Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, wenn man den Zähler des Subtrahenden vom Zähler des Minuenden subtrahiert und die erhaltene Differenz durch den gemeinschaftlichen Nenner dividiert.

$$\frac{12}{17} - \frac{9}{17} = \frac{12 - 9}{17} = \frac{3}{17}$$

b) Ungleichnamige Brüche müssen zuerst gleichnamig gemacht werden und dann findet die vorhergehende Regel Anwendung.

z. B. $\frac{7}{8} - \frac{5}{6} = \frac{21 - 20}{24} = \frac{1}{24}$

c) Sind gemischte Zahlen von einander zu subtrahieren, so addiert man zu der Differenz der ganzen Zahlen die Differenz der echten Brüche.

Z. B. $18\frac{4}{5} - 7\frac{3}{8} = 11 + \frac{32 - 15}{40} = 11 + \frac{17}{40} = 11\frac{17}{40}$

d) Ist bei gemischten Zahlen der echte Bruch des Minuenden kleiner als der des Subtrahenden, so addiert man zu ersterem eine Einheit des Ganzen.

Z. B.

$$106\frac{2}{7} - 84\frac{5}{6} = 22 + \frac{12 - 35}{42} = 21 + \frac{(42 + 12) - 35}{42}$$

$$= 21 + \frac{54 - 35}{42} = 21\frac{19}{42}$$

e) Ist der Minuend eine ganze Zahl, so nehme man von dem vorhandenen Ganzen des Minuenden eine Einheit und verwandle dieselbe in den dem Subtrahenden gleichnamigen Bruch.

Z. B. $8 - \frac{7}{12} = 7\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = 7\frac{5}{12}$

$$5 - 1\frac{3}{4} = 4\frac{4}{4} - 1\frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}$$

Fragen und Aufgaben.

1) Welche Brüche können nur subtrahiert werden und wie werden sie subtrahiert?

2) $\frac{13}{18} - \frac{7}{18}$

3) $\frac{25}{36} - \frac{4}{9}$

4) $9 - 5\frac{3}{8}$

5) $4\frac{3}{10} - 3\frac{7}{15}$

6) $7\frac{4}{9} - 6\frac{11}{15}$

7) $12 - 9\frac{5}{8}$

8) $3\frac{1}{12} - 2\frac{7}{16}$

9) $1517\frac{23}{133} - 698\frac{74}{95}$

10) $7\frac{1}{2} - 8$ $(= -\frac{1}{2})$

11) $9\frac{3}{4} - 10\frac{5}{8}$ $(= -\frac{7}{8})$

12) Eine Ware wiegt Brutto $26\frac{4}{5}$ kg, die Tara beträgt $\frac{3}{20}$ kg. Wie groß ist das Netto Gewicht?

13) Jemand kaufte eine Ware für $86\frac{4}{5}$ M. und verkaufte sie mit $8\frac{3}{4}$ M. Verlust. Wie teuer verkaufte er dieselbe?

14) Eine Ware wurde für $68\frac{3}{5}$ M. verkauft und man gewann dabei $7\frac{1}{2}$ M. Wie teuer war die Ware im Einkauf?

15) Eine Tonne Seife wog Btto $104\frac{4}{5}$ kg, Ntto nur $96\frac{1}{4}$ kg. Wie schwer wog die Tonne?

16) Ein Kaufmann nahm in einem Monate $12857\frac{9}{10}$ M. ein, während er $10732\frac{3}{4}$ M. ausgab. Wie groß ist sein Gewinn?

17) Jemand besitzt ein Gut im Werte von 72375 M. Darauf hat er $10732\frac{3}{4}$ M. Schulden. Wie groß ist sein Vermögen?

18) Zwei Kinder sind zusammen $12\frac{4}{5}$ Jahre alt; wenn das eine $7\frac{1}{2}$ Jahre alt ist, wie alt ist dann das andere?

19) Die Aktiva eines Kaufmannes betragen $54730\frac{1}{5}$ M., die Passiva $22317\frac{3}{4}$ M. Wie groß ist das Barvermögen?

20) Ein Klafter Holz kostet $17\frac{4}{5}$ M., ein anderes $14\frac{5}{8}$ M. Wie groß ist der Preisunterschied?

Addition und Subtraktion der Brüche.

Sind Brüche oder gemischte Zahlen teils zu addieren, teils zu subtrahieren, so zieht man von der Summe aller zu addierenden positiven Glieder die Summe aller zu subtrahierenden negativen Glieder ab.

Z. B.

1) $$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{7}{10} + \frac{5}{6} - \frac{5}{12} - \frac{7}{18} + \frac{287}{360}$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{6} + \frac{287}{360}\right) - \left(\frac{7}{10} + \frac{5}{12} + \frac{7}{18}\right)$$
$$= \frac{180 + 135 + 300 + 287}{360} - \frac{126 + 75 + 70}{180}$$
$$= \frac{902}{360} - \frac{271}{180} = \frac{902 - 542}{360} = \frac{360}{360} = \mathbf{1}.$$

2) $$6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} + 17\frac{5}{9} - \frac{5}{6} - 4\frac{1}{2} - 8\frac{1}{6} + \frac{7}{36}$$
$$= 9\,\frac{27 - 24 + 20 - 30 - 18 - 6 + 7}{36}$$
$$= 9\,\frac{(27 + 20 + 7) - (24 + 30 + 18 + 6)}{36}$$
$$= 9\,\frac{54 - 78}{36} = 8\,\frac{(54 + 36) - 78}{36} = 8\frac{12}{36} = \mathbf{8\frac{1}{3}}.$$

Fragen und Aufgaben.

1) Wie wird ein Aggregat (algebraische Summe) bestehend aus Brüchen und gemischten Zahlen berechnet?

2) $2\frac{3}{5} + 4\frac{1}{2} - 32\frac{5}{8} - 16\frac{2}{5} + 150\frac{4}{5} + 18\frac{2}{3} - 17\frac{8}{15}$

3) $22\frac{1}{2} - 5\frac{3}{4} + 75\frac{5}{9} + 13\frac{4}{11} - 75\frac{13}{15} - 46\frac{4}{5} - 2\frac{1193}{1980}$

4) $2\frac{1}{2} - 4\frac{5}{12} + 3\frac{7}{18} + 4\frac{7}{10} - 9\frac{14}{36} - 75\frac{7}{10} + 3\frac{5}{6} + \frac{207}{360} + \frac{2}{9} - \frac{51}{360}$

5) $2\frac{3}{4} + 6\frac{2}{3} - 27\frac{5}{9} + 18\frac{5}{6} + 32\frac{1}{2} - 8\frac{1}{6} + 7\frac{19}{36}$

6) Was erhält man, wenn zur Differenz aus den Zahlen $1732\frac{3}{4}$ und $1633\frac{4}{5}$ die Summe der Zahlen $16\frac{2}{3}$ und $25\frac{1}{4}$ addiert wird?

7) Man suche eine Zahl, die von der Summe aus $2\frac{1}{3}$ und $6\frac{3}{4}$ subtrahiert die Differenz aus $15\frac{7}{8}$ und $10\frac{13}{16}$ gibt?

8) Man gebe die Differenz der Summen $(2\frac{3}{5} + 4\frac{1}{2} + 17\frac{3}{4})$ und $(1\frac{3}{4} + 10\frac{4}{5} + 7\frac{5}{6})$ an!

9) Berechnet: $3\frac{4}{5} - 21\frac{2}{3} + 70\frac{5}{8} - \frac{3}{4} - 41\frac{7}{9} + 12\frac{1}{2} - \frac{5}{8} - \frac{119}{180}$!

10) $4 - \frac{1}{4} - 3\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 1$

11) $1\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{5}{6} + 2\frac{1}{2}$

12) $1\frac{3}{8} - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + 2\frac{1}{8} - 3\frac{1}{2} - 4\frac{3}{4}$

13) $3\frac{5}{8} - 1\frac{1}{5} + \frac{7}{8} + \frac{1}{3} - 2 + 1\frac{3}{10} + 1\frac{1}{15} - 2\frac{3}{4}$

14) $3 - 1\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{5}{12}$

15) $14\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} - \frac{3}{10} - \frac{5}{6} - 2 + 1 - 3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{3}{20} - 5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}$

5. Multiplikation der Brüche.

a) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl oder eine ganze Zahl wird mit einem Bruche multipliciert, indem man entweder den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciert, oder wo es möglich ist, den Nenner durch dieselbe dividiert.

1) $\frac{5}{6} \cdot 7 = \frac{5 \cdot 7}{6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$

2) $\frac{5}{8} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{4}{8} = 2\frac{1}{2}$

$\frac{5}{8} \cdot 4 = \frac{5}{8 : 4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

3) $\frac{19}{24} \cdot 8 = \frac{19}{24 : 8} \; \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$

4) $20 \cdot \frac{7}{40} = \frac{7}{40 : 20} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

Anm. Eine ganze Zahl oder ein Bruch wird durch Multiplikation mit einem echten Bruche immer kleiner. Warum?

b) Zwei oder mehrere Brüche werden multipliciert, wenn man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner dividiert.

(Anm. Der Beweis dieses Satzes ist dem Unterrichte vorbehalten.)

Hat der Zähler des einen Bruches mit dem Nenner des andern einen gemeinschaftlichen Teiler oder Divisor, so kann man durch Division mit demselben die Rechnung vereinfachen.

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 9} = \frac{20}{63}$$

$$\frac{26}{45} \cdot \frac{27}{65} = \frac{2 \cdot 13}{5 \cdot 9} \cdot \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 13} = \frac{6}{25}$$

oder

$$\frac{26}{45} \cdot \frac{27}{65} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{6}{25}$$

c) Gemischte Zahlen werden vor der Multiplikation in unechte Brüche verwandelt, ganze Zahlen in Brüche mit dem Nenner 1.

$$12 \cdot 5\frac{1}{2} \cdot 3\frac{4}{7} \cdot 5\frac{3}{5}$$

$$= \frac{\not{12} \cdot 11 \cdot \not{25} \cdot \not{28}}{1 \cdot \not{2} \cdot \not{7} \cdot \not{5}}$$

$$= \frac{6 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 4}{1} = 1320.$$

Fragen und Aufgaben.

1) Wie werden Brüche und gemischte Zahlen miteinander multipliciert?

2) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$

3) $15 \cdot 2\frac{2}{5}$

4) $2\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{7} \cdot 1\frac{17}{25}$

5) $3\frac{3}{8} \cdot \frac{32}{45} \cdot 1\frac{1}{14} \cdot 35$

6) $23\frac{1}{2} \cdot 25\frac{4}{7} \cdot 2\frac{7}{8} \cdot \frac{20}{141} \cdot 2\frac{1}{23}$

7) $9\frac{3}{3} \cdot 5\frac{7}{9} \cdot 1\frac{4}{35} \cdot \frac{49}{507}$

8) $8\frac{5}{8} \cdot 6\frac{2}{9} \cdot 2\frac{18}{23} \cdot 2\frac{23}{35} \cdot \frac{15}{248}$

9) $85\frac{3}{4} \cdot 6\frac{6}{7} \cdot 1\frac{11}{16} \cdot \frac{6}{11} \cdot 4\frac{13}{27} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{7}$

10) $39\frac{3}{11} \cdot 3\frac{2}{5} \cdot 4\frac{1}{8} \cdot 20\frac{4}{7} \cdot 1\frac{2}{13} \cdot 2\frac{1}{6} \cdot \frac{7}{255} \cdot 1\frac{17}{48}$

11) $10\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot 9$

12) $(3 - 2\frac{3}{5}) \cdot 10$

13) $\frac{18}{21} \cdot [20\frac{7}{12} - (4\frac{7}{15} + 13\frac{151}{180})]$

14) Was erhält man, wenn von 5 der 7te Teil 14 mal genommen wird?

15) Wenn der Wert eines Faktors $3\frac{5}{8}$, der des andern $\frac{2}{29}$ ist, welches ist das Produkt?

6. Division der Brüche.

a) Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man entweder den Zähler des Bruches durch die ganze Zahl dividiert oder den Nenner mit derselben multipliciert. Haben der Zähler und die ganze Zahl einen gemeinschaftlichen Teiler oder Divisor, so dividiert man zuvor mit demselben.

$$\frac{12}{13} : 4 = \frac{12 : 4}{13} = \frac{3}{13}$$

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

b) Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man das Produkt aus dem Zähler des Dividenden und dem Nenner des Divisors dividiert durch das Produkt aus dem Nenner des Dividenden und dem Zähler des Divisors oder kurz: **Zwei Brüche werden dividiert, indem man mit dem umgestürzten Divisor (dem reciproken Werte) multipliciert.**

Anm. Jede Zahl oder jeder Bruch multipliciert mit dem reciproken Werte ist = 1. Beweis bleibt dem Unterrichte vorbehalten.

Z. B. $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$

$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

c) Jede ganze Zahl kann man sich immer als Bruch mit dem Nenner 1 denken.

Z. B. 3 = $\frac{3}{1}$; der reciproke Wert von 3 ist also $\frac{1}{3}$.

$\frac{9}{10} : 3 = \frac{9 : 3}{10} = \frac{3}{10}$

oder:

$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{10} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{3}{10}$

d) Zwei Brüche können, wo es möglich ist, auch dividiert werden, indem man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividiert.

Z. B. $\frac{12}{49} : \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$

e) Gemischte Zahlen werden wie bei der Multiplikation zuvor in unechte Brüche verwandelt.

Z. B. $10\frac{1}{4} : 20\frac{1}{2} = \frac{41}{4} : \frac{41}{2} = \frac{1}{2}$

Fragen und Aufgaben.

1) Wie werden Brüche und gemischte Zahlen durcheinander dividiert?

2) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$

3) $\frac{4}{5} : 8$

4) $16 : \frac{4}{5}$

5) $30 : \frac{5}{11}$

6) $\frac{5}{11} : 30$

7) $\frac{3}{5} : \frac{5}{9}$

8) $3\frac{3}{7} : \frac{8}{21}$

9) $2\frac{7}{22} : \frac{17}{44}$

10) $2\frac{3}{8} : 3\frac{9}{16}$

11) $6 : \frac{1}{4} : 2\frac{2}{3}$

12) $1\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : 4\frac{1}{2}$

13) $2\frac{2}{3} : \frac{2}{3} : \frac{1}{4}$

14) $9\frac{2}{7} : 2\frac{1}{6} : 10\frac{1}{2}$

15) $\frac{1}{2} : 2 : \frac{1}{16} : 24$

7. Multiplikation und Division der Brüche.

1) Wie wird ein algebraisches Produkt (Serie), bestehend aus Brüchen und gemischten Zahlen, berechnet?

2) $9\frac{8}{8} : \frac{25}{32} \cdot \frac{1}{4}$

3) $9\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$

4) $68\frac{5}{6} \cdot 27\frac{5}{8} : 63\frac{11}{12}$

5) $8\frac{3}{4} \cdot 40\frac{5}{6} : 1572\frac{1}{12} \cdot 28\frac{3}{5}$

6) $23\frac{4}{7} \cdot 63 : 39\frac{3}{8}$

7) $12\frac{3}{8} \cdot 12\frac{4}{9} : 6\frac{8}{15}$

8) $4\frac{7}{8} \cdot 9\frac{3}{7} : 10\frac{3}{14}$

9) $9\frac{3}{8} : \left(\frac{25}{32} \cdot \frac{1}{4}\right)$

10) $\dfrac{20\frac{44}{135} \cdot 23\frac{109}{196}}{27\frac{87}{115}}$

11) $\dfrac{18\frac{27}{32} \cdot 19\frac{109}{189}}{94\frac{97}{112}}$

12) $\dfrac{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{4}} \cdot 5$

13) $\dfrac{16}{\frac{4}{5}} \cdot 3$

14) $\dfrac{7\frac{1}{2} \cdot 9\frac{4}{5} \cdot 15\frac{3}{11} \cdot 6\frac{3}{7} \cdot 36}{\frac{6}{11} \cdot 6\frac{3}{4} \cdot 49 \cdot 6\frac{2}{5}}$

15) $\dfrac{4\frac{2}{7} : (9\frac{1}{3} : 5\frac{1}{4})}{18\frac{3}{8} : (8\frac{1}{6} \cdot 1\frac{24}{25})}$

16) $\dfrac{23\frac{1}{3} : [(11\frac{1}{9} : 4\frac{1}{2}) : 2\frac{1}{8}]}{5\frac{2}{5} : (3\frac{1}{21} \quad 6\frac{2}{11})}$

17) $\frac{5}{8} \cdot 3\frac{3}{5} : 1\frac{1}{2}$

18) $\frac{3}{10} : \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}\right)$

19) $1\frac{1}{2} : \left(1\frac{2}{5} \cdot 1\frac{3}{7}\right)$

20) $6\frac{2}{7} : \left(4\frac{13}{16} \cdot 9\frac{1}{7}\right)$

8. Von den zusammengesetzten Brüchen oder den sogenannten Bruchbrüchen.

Unter einem sogenannten Bruchbruch versteht man einen Bruch, in welchem der Zähler oder Nenner oder beide aus Brüchen oder aus einer Verbindung von Brüchen bestehen.

Z. B. $\frac{\frac{3}{4}}{5} \quad \frac{5}{\frac{4}{9}} \quad \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} \quad \frac{5\frac{1}{2}}{2\frac{2}{3}}$

1) $\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$

2) $\frac{5}{\frac{4}{9}} = 5 : \frac{4}{9} = 5 \cdot \frac{9}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$

3) $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{7} : \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$

4) $\frac{5\frac{1}{2}}{2\frac{2}{3}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{8}{3}} = \frac{11}{2} : \frac{8}{3} = \frac{11}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{33}{16} = 2\frac{1}{16}$

Anm. Wenn der Bruch die Bruchform $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$ hat, so gibt das Produkt der beiden äußeren Zahlen den Zähler, das Produkt der beiden inneren den Nenner.

Z. B. $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$.

$\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{1}} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

Betreffs zusammengesetzter Ausdrücke wird in Bezug auf die Aufeinanderfolge der Operationen und Behandlung der Klammern auf Seite 16, 17, 18 und 19 verwiesen.

Z. B. $\left[\left(13\frac{1}{9} + 12\frac{5}{6} : \frac{2}{9}\right) - \left(10\frac{2}{3} \cdot 75 - 799\frac{3}{4}\right)\right] : \frac{1}{18}$

$= \left[\left(13\frac{1}{9} + 57\frac{3}{4}\right) - \left(800 - 799\frac{3}{4}\right)\right] : \frac{1}{18}$

$= \left[70\frac{31}{36} - \frac{1}{4}\right] : \frac{1}{18}$

$$= 70\frac{22}{36} : \frac{1}{18}$$

$$= \frac{2542}{\not{36}} \cdot \frac{\not{18}}{1}$$

$$= 1\overset{2}{2}71.$$

Fragen und Beispiele.

1) Was versteht man unter einem Bruchbruch?

2) $\dfrac{2\frac{3}{5}}{1\frac{2}{3}}$

3) $\dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}}$

4) $\dfrac{15}{\frac{5}{6}}$

5) $\dfrac{\frac{7}{9}}{4\frac{5}{9}}$

6) $\dfrac{\frac{7}{8}}{16}$

7) $\dfrac{5\frac{1}{3}}{3\frac{1}{5}}$

8) $\dfrac{4\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$

9) $\dfrac{\frac{1}{3}}{3}$

10) $\dfrac{\frac{4}{5}}{1\frac{1}{4}}$

9. Vermischte Aufgaben über die vier Rechnungsarten mit gemeinen Brüchen.

1) $(4\frac{3}{4} + 3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{5}{8} - 9\frac{7}{8}) \cdot (5\frac{2}{3} - 2\frac{5}{9} + 2\frac{7}{9} : 1\frac{17}{18})$
$+ 2\frac{73}{108}$

2) $(2\frac{4}{7} + 50\frac{5}{8} : 6\frac{3}{4}) : (1\frac{13}{35} \cdot 2\frac{5}{8} - 7\frac{1}{14} : 5\frac{1}{2}) + 4\frac{7}{12}$
$: 1\frac{19}{26}$

3) $(1\frac{7}{8} - 3\frac{3}{20} : 1\frac{11}{25} + 1\frac{1}{24}) \cdot (17\frac{1}{9} : 2\frac{11}{12} - 7\frac{2}{6}$
$+ 3\frac{6}{35}) - \frac{35}{108}$

4) $(19\frac{5}{12} + 11\frac{1}{4} \cdot 1\frac{11}{15} - 17\frac{7}{18}) : (14 - 6\frac{7}{18} : 1\frac{2}{3}$
$- 2\frac{7}{8}) - 1\frac{20}{21}$

5) $(48\frac{5}{7} - 12\frac{1}{14} \cdot 1\frac{11}{52} - 30\frac{3}{4}) : (33\frac{2}{5} - 7\frac{13}{14} \cdot 3\frac{8}{9})$
$+ 13\frac{3}{14} : 7\frac{7}{9}$

6) $\left(9\frac{17}{24} - 10\frac{7}{36} + 121\frac{1}{2} : 10\frac{4}{5}\right) : \left(28 - 4\frac{19}{24} \cdot 1\frac{3}{5} - 5\frac{3}{4}\right) + 3\frac{5}{6} : 14\frac{7}{11}$

7) $\left(1\frac{5}{27} \cdot 3\frac{3}{16} - 15\frac{3}{10} : 4\frac{8}{15}\right) \cdot \left(1\frac{17}{55} \cdot 11\frac{2}{3} - 85\frac{83}{85} : 5\frac{4}{5}\right) \cdot 6\frac{13}{29} + \frac{5}{6}$

8) $\left(8\frac{5}{6} - 15 \cdot \frac{13}{45} + 43\frac{1}{14} : 2\frac{4}{7}\right) \cdot \left(293 - 259\frac{101}{126} - 108 : 30\frac{3}{8}\right) - 9\frac{11}{21} \cdot 3\frac{9}{64}$

9) $\dfrac{27\frac{1}{9} + 4\frac{1}{5} \cdot 3\frac{3}{14} + 12\frac{1}{3}}{7\frac{3}{4} + 33\frac{3}{5} : 4\frac{4}{35} - 15\frac{7}{0}} + \dfrac{28\frac{7}{8} \cdot 43\frac{1}{5}}{10\frac{1}{2}}$

10) $\dfrac{11\frac{5}{9} - 7\frac{11}{28} \cdot 1\frac{8}{27} + 71\frac{3}{4} : 8\frac{11}{14}}{8\frac{5}{8} - 15\frac{5}{6} : 1\frac{4}{15} + 15\frac{11}{15} : 2\frac{17}{21}} + \dfrac{32\frac{4}{5} \cdot 9\frac{4}{9} : 21}{15\frac{11}{56} : 1\frac{5}{32}}$

11) $\dfrac{\left(1\frac{5}{12} + 6\frac{5}{17} : 1\frac{1}{21}\right) : \left(\left(31\frac{1}{2} - 16\frac{1}{3}\right) : 18\frac{1}{5}\right) + 3\frac{1}{12} \cdot 10\frac{1}{5}}{\left[\left(10\frac{1}{5} : 4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\right) : \left(\left(10 - 6\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{12}\right)\right] : \left(20\frac{20}{27} : 4\frac{1}{5}\right)} + 2\frac{7}{9}$

12) Ein Soldat ist $37\frac{3}{4}$ Jahre alt und trat mit $17\frac{11}{12}$ Jahren in den Militärdienst. Wie lange diente er als Soldat?

13) Eine Brunnenröhre liefert stündlich $3\frac{3}{4}$ hl Wasser. Wie viel liefert sie in $4\frac{1}{2}$ Stunden?

14) Ein Weinwirt füllt mehrere Flaschen, deren jede $\frac{3}{4}$ Liter hält mit 4 hl 80 l. Wie viele Flaschen hat er dazu nötig?

15) Wenn $3\frac{1}{2}$ laufende Meter einer Eisenstange $8\frac{3}{4}$ kg wiegen; wie viel wiegen $2\frac{1}{2}$ laufende Meter?

16) Von einem Zeuge kosten $1\frac{7}{8}$ m $4\frac{4}{5}$ Mark. Wie viel m erhält man für $28\frac{4}{5}$ Mark?

17) Es werde die Zahl $8\frac{5}{6}$ in zwei solche Teile geteilt, daß der eine um $1\frac{3}{4}$ größer ist als der andere. Wie heißen diese Teile?

18) Der Zahlenausdruck $\dfrac{\left(4\frac{1}{6} - 2\frac{3}{4} + 2\frac{1}{8}\right) \cdot 385\frac{1}{7}}{\left(5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} - 6\frac{7}{64}\right) \cdot 4\frac{4}{21}} : \dfrac{\;\dfrac{4\frac{1}{4}}{3\frac{1}{8}}\;}{\;\dfrac{3\frac{2}{5}}{1\frac{6}{11}}\;}$ gibt das Jahr an, in welchem Kaiser Karl IV. die Universität Prag stiftete. In welchem Jahre geschah dies?

19) Jemand will eine Fläche von 1 Hektar und 2 Ar mit Weichselbäumen bepflanzen. Wie viele solcher Bäumchen braucht er, wenn für jedes $3\frac{2}{5}$ qm notwendig sind?

20) Ein Weinwirt erhielt 1 hl 5 Dl und bezahlt dafür $70\frac{1}{2}$ Mark. Die Fracht betrug $14\frac{1}{5}$ Mark. Wie teuer muß er den halben Liter verkaufen, wenn er $35\frac{3}{10}$ Mark gewinnen will?

21) 1290 Stück einer Ware werden um 1290 Mark eingekauft; beim Verkaufe wird an jedem Stücke $\frac{1}{10}$ Mark gewonnen. a) was kostet 1 Stück im Einkauf, b) beim Verkauf, c) wie groß ist die gesammte Verkaufssumme?

22) Ein Behälter kann durch 3 Röhren gefüllt werden und zwar durch die 1. Röhre in $2\frac{1}{2}$ Stunden, durch die 2. in $3\frac{2}{3}$ und durch die 3. in $4\frac{2}{5}$ Stunden. In welcher Zeit wird der leere Behälter durch alle 3 Röhren zugleich gefüllt?

23) Von Kerzen, die drei Stunden lang brennen, gehen 10 Stück auf 1 ℔ und von solchen, welche 6 Stunden brennen, 8 Stück. Wenn nun von den ersteren das ℔ 85 Pf. kostet, von den letzteren das ℔ 95 Pf. Welche Beleuchtung ist die billigere und um wie viel?

24) Wie groß ist der tägliche Gasconsum einer Fabrik, in welcher morgens von 6—$7\frac{1}{2}$ Uhr und abends von $4\frac{1}{2}$—$7\frac{3}{4}$ Uhr 128 Gasflammen brennen, von denen jede per Stunde $\frac{2}{19}$ cbm Gas verzehrt, und wie hoch kommt per Monat die Gasbeleuchtung, wenn der cbm zu 25 Pf. berechnet wird?

25) Wenn man den Ausdruck $\dfrac{\frac{4}{15} : \frac{8}{9}}{\dfrac{\frac{2}{45}}{269\frac{1}{3}}}$ auf seine einfachste Form bringt, erhält man das Jahr, in welchem Bayern seine Verfassungsurkunde erhielt. In welchem Jahre war dies?

10. Resolvierung benannter Brüche.

Brüche werden in Einheiten einer niederen Sorte verwandelt, wenn man den Bruch mit der Reduktionszahl multipliziert.

Z. B.

1) Wie viel deutsche Reichspfennige geben $\frac{3}{5}$ Mark?

$$\frac{3}{5} \cdot 100 = \frac{3 \cdot \overset{20}{\cancel{100}}}{\cancel{5}} = 60$$ dl. deutsche Reichsw.

2) Wie viel Centimes geben $\frac{4}{5}$ Francs?

$$\frac{4}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \overset{20}{\cancel{100}} = 4 \cdot 20 = 80$$ Centimes.

3) Wie viele Monate Tage Stunden Minuten und Sekunden sind $\frac{5}{7}$ Jahre?

$\frac{5}{7}$ a $= \frac{5}{7} \cdot 12$ Monat $= \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$ Monate

$\frac{4}{7}$ Monat $= \frac{4}{7} \cdot 30$ d $= \frac{120}{7} = 17\frac{1}{7}$ d

$\frac{1}{7}$ d $= \frac{1}{7} \cdot 24$ h $= \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$ h

$\frac{3}{7}$ h $= \frac{3}{7} \cdot 60' = \frac{180}{7} = 25\frac{5}{7}'$

$\frac{5}{7}' = \frac{5}{7} \cdot 60'' = \frac{300}{7} = 42\frac{6}{7}''$

Antwort: $\frac{5}{7}$ Jahre = 8 Monate 17 Tage 3 Stunden 25 Minuten $42\frac{6}{7}$ Sekunden.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie resolviert man benannte Brüche?
2) $87\frac{3}{4}$ Mark ? Pf.
3) $109\frac{41}{45}$ Grad ? Minuten und Sekunden.
4) $43\frac{23}{24}$ Ballen ? Bogen Schreibpapier.
5) $17\frac{61}{75}$ Ballen ? Bogen Druckpapier.
6) $14\frac{173}{192}$ Tage ? Stunden und Minuten.
7) $17\frac{263}{288}$ Tage ? Sekunden.
8) $\frac{3}{25}$ fl. öst. ? Neukr.
9) $\frac{2}{25}$ Francs ? Centimes.
10) $\frac{1}{6}$ Jahr ? Tage.
11) $\frac{2}{3}$ Tage ? Minuten.
12) $\frac{4}{5}$ qm ? qdm.
13) $\frac{7}{8}$ cbm ? cdm.

14) $1\frac{3}{4}$ ha ? qm

15) $2\frac{1}{4}$ £ ? sh

16) $7\frac{3}{5}$ R⁰S ? Kop.

17) $2\frac{1}{5}$ £ ? cs.

18) $4\frac{4}{5}$ \$? cs.

19) $1\frac{1}{2}$ Schock ? Stücke.

20) $\frac{3}{8}$ Grss ? Stücke.

2. Reducierung benannter Brüche.

Einheiten einer niederen Ordnung werden in einen Bruch einer höheren Ordnung verwandelt, wenn man durch die Reduktionszahl dividiert.

1) Wie viele Mark sind 90 dl. deutsche Reichswährung?

90 dl. $= \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ Mark.

2) Wie viele Francs sind 60 Centimes?

60 Centimes $= \frac{60}{100}$ Francs $= \frac{6}{10}$ Francs $= \frac{3}{5}$ Francs.

3) Wie viele Ballen sind 15 Buch Schreibpapier?

15 Buch $= \frac{15}{200} = \frac{3}{40}$ Ballen.

4) Der wie vielte Teil eines Jahres sind 8 Monate 17 Tage 3 Stunden 25 Minuten $42\frac{6}{7}$ Sekunden?

$$42\frac{6}{7}'' = \frac{42\frac{6}{7}'}{60} = \frac{300}{7} : \frac{60}{1} = \frac{\overset{5}{\cancel{300}}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{60}} = \frac{5'}{7}$$

$$25\frac{5'}{7} = \frac{25\frac{5}{7}}{60}\,h = \frac{180}{7} : \frac{60}{1} = \frac{\overset{3}{\cancel{180}}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{60}} = \frac{3}{7}\,h$$

$$3\frac{3}{7}\,h = \frac{3\frac{3}{7}}{24}\,d = \frac{24}{7} : \frac{24}{1} = \frac{\cancel{24}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{24}} = \frac{1}{7}\,d$$

$$17\frac{1}{7}\,d = \frac{17\frac{1}{7}}{30}\,\text{Monat} = \frac{120}{7} : \frac{30}{1} = \frac{\overset{4}{\cancel{120}}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{30}} = \frac{4}{7}\,\text{Monat}$$

$$8\frac{4}{7}\text{ Monate} = \frac{8\frac{4}{7}}{12} = \frac{60}{7} : \frac{12}{1} = \frac{\overset{5}{\cancel{60}}}{7} \cdot \frac{1}{\cancel{12}} = \frac{5}{7}\text{ Jahr.}$$

Antwort. 8 Monate 17 Tage 3 Stunden 25 Minuten $42\frac{6}{7}$ Sekunden = $\frac{5}{7}$ Jahr.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie werden Einheiten einer niederen Ordnung in einen Bruch einer höheren Ordnung verwandelt?
2) 67 Mark 75 Pf. ? Mark.
3) 120 fl. öst. 80 Nkr. ? fl. öst.
4) 6 Francs 60 Centimes ? Francs.
5) 43 Grad 46 Minuten 24 Sekunden ? Grad.
6) 27 Ballen 7 Ries 5 Buch 20 Bogen ? Ballen Schreibpapier.
7) 23 Ballen 7 Ries 17 Buch 8 Bogen ? Ballen Druckpapier.
8) 23 Tage 17 Stunden 41 Minuten 36 Sekunden ? Tage.
9) 67 Grad 48 Minuten 46 Sekunden 40 Terzen ? Grad.
10) 12 £ 25 cs? £
11) 70 £ 10 s 6 d? £
12) 2 R°S 85 Kop? R°S
13) 27 $ 95 cs? $
14) 6 Sch 3 Mdl 40 St? Sch
15) 2 Mdl 30 St? Mdl
16) 1 Grss 6 Dtzd 6 Stck? Grss
17) 2 Dtzd 3 Stck? Dtzd
18) 75 qm 50 qcm? qm
19) 6 a 20 qm? a
20) 5 cbm 500 ccm? cbm

6. Decimalbrüche.

1. Erklärung.

Die Haupteigenschaft des dekadischen Zahlensystems besteht darin, daß jede Ziffer, wenn sie um eine Stelle nach rechts gerückt wird, einen 10mal kleineren Wert hat. Wenn man nun dieses Zahlensystem auf Brüche ausdehnt, so entstehen dadurch die **Decimalbrüche**; oder bildet man eine Reihe Brüche in der Weise, daß man zum Nenner eine Eins mit so vielen Nullen nimmt, als der Zähler Ziffern hat, wie $\frac{7}{10}$, $\frac{22}{100}$, $\frac{447}{1000}$ 2c., so ist es nicht nötig, den Nenner anzuschreiben, weil er aus

dem Zähler dadurch bestimmt wird, daß für jede Ziffer im Zähler eine 0 im Nenner gedacht wird. Die einzelnen Ziffern des ohne Nenner geschriebeneu Zählers nennt man Decimalen, welche von den etwa vorhandenen Ganzen durch ein Komma getrennt werden. Sind keine Ganzen vorhanden, so wird an deren Stelle eine 0 gesetzt.

Die auf diese Art geschriebenen Brüche, welche also nur die Zahl 10 oder eine Potenz von 10 zum Nenner haben, heißen **Decimalbrüche.** Z. B. $\frac{3}{10} = 0{,}3$ $\frac{33}{10} = 0{,}33$ $\frac{449}{1000} = 0{,}449$ $2\frac{37}{100} = 2{,}37$

Anm. Die Decimalbrüche sind nichts anderes als die Fortsetzung des dekadischen Zahlensystems unter die Einheit.

Z. B. 6783,53675

6 Tausender	5 Zehntel
7 Hunderter	3 Hundertel
8 Zehner	6 Tausendtel
3 Einheiten	7 Zehntausendtel
vor dem Komma	5 Hunderttausendtel
	nach dem Komma.

Wenn der Nenner eines Decimalbruches immer eine 1 mit so vielen 0 ist, als der Zähler Ziffern hat, so muß auch umgekehrt der Zähler immer so viele Ziffern haben, als der Nenner 0 hat.

Ist der Bruch $\frac{3}{100}$ gegeben, so hat hier der Zähler nur eine Ziffer 3; der Zähler muß aber, wenn der Bruch $\frac{3}{100}$ als Decimalbruch geschrieben werden soll, 2 Ziffern haben, weil der Nenner 2 Nullen hat.

Es wird daher der Zahl 7 eine Null vorgesetzt, die keinen Wert hat, aber den Wert des 3 um das Zehnfache verringert; es ist also

$\frac{7}{100} = 0{,}07$; ebenso ist $\frac{7}{10000} = 0{,}0007$ $3\frac{37}{10000} = 3{,}0037$

Ein Decimalbruch bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man demselben eine oder mehrere Nullen anhängt. Indem man nämlich dem Decimalbruch eine Null anhängt, wird auch dem dazu gedachten Nenner eine Null angehängt, da der ganze Bruch sowohl im Nenner als im Zähler mit 10 multipliciert, d. h. erweitert worden ist.

Z. B. $$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000} = \frac{3000}{10000}$$

oder

$$0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}3000$$

Fragen und Aufgaben.

1) Was ist ein Decimalbruch?
2) Wie werden Decimalbrüche angeschrieben?
3) Wie unterscheidet sich ein Decimalbruch von einem gewöhnlichen Bruche?
4) Man schreibe folgende gemeine Brüche als Decimalbrüche an:

$\frac{3}{10}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{301}{1000}$ $\frac{4}{10000}$ $\frac{4007}{100000}$ $200\frac{9}{10}$ $780\frac{5}{100}$

$460\frac{3}{1000}$ $23\frac{15}{10000}$ $\frac{12}{10000}$

5) Man lese folgende Decimalbrüche:

a) 0,8 b) 0,08 c) 0,0004 d) 0,30047 e) 0,000001
f) 15,325 g) 0,287532 h) 17,0003 i) 4,02.

2. Addition der Decimalbrüche.

Decimalbrüche werden addiert, indem man die gleichnamigen Stellen wie bei ganzen Zahlen addiert.

Am einfachsten schreibt man bei der Addition die Decimalbrüche so untereinander, daß genau Komma unter Komma zu stehen kommt, wodurch dann von selbst die gleichnamigen Stellen in einer Reihe erscheinen. Z. B.

347,632 + 5,05439 + 10,3 + 0,000475 + 1237,1456 + 4,2 + 16,57545 = 1620,907915

oder

```
 347,632
   5,05439
  10,3
   0,000475
1237,1456
   4,2
  16,57545
------------
1620,907915
```

Fragen und Aufgaben.

1) Wie werden Decimalbrüche addiert?
2) 24,034 + 5,2007
3) 0,99 + 0,099 + 0,0098 + 0,9902 + 0,901 + 0,01
4) 0,4826 + 5,703 + 1,00597 + 67,47
5) 4,01739 + 0,009 + 18,45731 + 107,3

6) 28,597 + 512,78 + 6,0235 + 54,896 + 485,0026
7) a) 2,9186 + 4,75831 + 0,0031 + 22,0708 + 0,24919
b) 3,1883 + 1212,79385 + 0,0091 + 84,00875
8) 3,397 + 0,75 + 220,83 + 0,023
9) 2,75 + 7,32 + 3,9875 + 7,032 + 0,9105
10) 8,201 + 1,028 + 0,1028 + 2,108 + 8,5602.

3. Subtraktion der Decimalbrüche.

Decimalbrüche werden von einander subtrahiert wie ganze Zahlen und zwar, indem man die gleichnamigen Stellen von einander subtrahiert (Komma unter Komma).

Hat der Subtrahend weniger Decimalstellen als der Minuend oder auch umgekehrt, so sind die fehlenden Stellen durch Nullen zu ersetzen.

Z. B. 238,26375 — 86,97543 = 151,28832

oder

```
238,26375
 86,97543
─────────
151,28832
```

67,245 — 11,0047865 = 56,2402135

oder

```
67,2450000
11,0047865
──────────
56,2402135
```

32,347958 — 9,526 = 22,821958

```
32,347958
 9,526000
─────────
22,821958
```

Fragen und Aufgaben.

1) Wie werden Decimalbrüche subtrahiert?
2) 17,831 — 3,3
3) 15,67 — 12,1269
4) 39,2569 — 14,863
5) 13 — 9,821
6) 19,7 — 11,87657.
7) 26,2137 — 25,1048
8) 80 — 9,37
9) 458 — 396,4578
10) 0,6456 — 0,4573.

4. Addition und Subtraktion der Decimalbrüche.

Sollen Decimalbrüche teils addiert, teils subtrahiert werden, so zieht man von der Summe der positiven die Summe der negativen Glieder ab.

Z. B. $403{,}125 + 12{,}6017 + 4321{,}1 - 5{,}3 - 7{,}061 + 1{,}65 - 7{,}8379$
$= (403{,}125 + 12{,}6017 + 4321{,}1 + 1{,}65) - (5{,}3 + 7{,}061 + 7{,}8379)$
$= 4738{,}4767 - 20{,}1989$
$= 4718{,}2778$

oder

403,125			
12,6017		5,3	
4321,1		7,061	
1,65		7,8379	
4738,4767	(Summe der positiven Glieder.)	20,1989	(Summe der negativen Glieder.)
—20,1989			
4718,2778			

Fragen und Aufgaben.

1) Wie wird ein Aggregat, bestehend aus Decimalbrüchen, berechnet?
2) $47{,}391 - 0{,}8765 + 103{,}57 - 13{,}19783$
3) $0{,}23489 - 0{,}67598 + 3{,}475 - 0{,}09 + 2{,}84509$
4) $0{,}57 - 0{,}23493 - 0{,}137 + 673{,}1 - 105{,}40807$
5) $83{,}47 - 103 + 25{,}239 - 0{,}08373 + 310{,}04473$
6) $19 - 1{,}25 + 2{,}5 - 0{,}625 + 2 + 0{,}4 + 2{,}02 - 0{,}045$
7) $18{,}9 - 2{,}06 + 0{,}2 - 2 + 0{,}008 - 4{,}008 + 0{,}6 - 2{,}004$
8) $3{,}18 + 0{,}8 - 3{,}28 + 2{,}9 + 7{,}24 - 1{,}04$
9) $932{,}75 - 6{,}5 - 0{,}88 + 0{,}46$.
10) Addieret zur Summe aus 2,9186 und 3,0814 die Differenz aus 2,5163 und 2,4837!
11) Ein Geschäftsmann hatte eine Ware mit 275,23 *M.* Verlust verkauft. Wenn er die Ware um 1875 *M.* verkauft hätte, hätte er 50 *M.* gewonnen, wie teuer hat er die Ware gekauft?
12) Ein Gutsbesitzer hat 136,75 ha Aecker, 375,32 ha Wiesen und den Rest seines Besitztums von 750 ha an Waldung. Wie groß ist sein Besitz an Waldung?

13) In einem Hause braucht man jährlich 1324,75 *M.* für Lebensmittel, 432 *M.* für Wohnung, 375,85 *M.* für Holz und Licht, 1306,80 *M.* für sonstige Bedürfnisse. Wenn man nun 6825 *M.* einnimmt, wie viel kann man zurücklegen?

14) Von einem Holzvorrat von 75,25 cbm brauchte man in drei Monaten 3,25 Ster 7,32 Ster 9,38 Ster. Wie viel blieb noch übrig?

15) Ein Brauer verzapft von 2175 hl Bier 2132,85 hl selbst, während den Rest sein Dienstpersonal trinkt. Wie viel hl Bier muß er demnach für das Letztere einsieden?

5. Multiplikation der Decimalbrüche.

Decimalbrüche werden miteinander multipliciert, indem man sie ohne Rücksicht auf das Decimalkomma multipliciert und von dem Produkte so viele Decimalstellen von rechts nach links abschneidet, als die Faktoren zusammen haben.

Z. B. 1) 38,406 . 0,23 = 8,83338

```
 38,406
   0,23
-------
 115218
 76812
-------
8,83338
```

*2) 0,000718 . 23 = 0,016514

```
       23
---------
     2154
    1436
---------
 0,016514
```

Ein Decimalbruch wird mit 10, 100, 1000, 10000 ꝛc. multipliciert, wenn man das **Decimalkomma ein, zwei, drei, vier u. s. w. Stellen nach rechts rückt.**

Z. B. 2,0784 . 100 = 207,84
0,653 . 10000 = 6530.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie werden Decimalbrüche multipliciert?

2) 0,06875 . 4000	4) 4789 . 1,9
3) 15,11 . 9	5) 13,37 . 800

* Im Produkte werden die links fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt.

6) 0,0000375 . 80000
7) 20,485 . 024
8) 0,0465 . 08
9) 6,08 . 0,00125
10) 0,06691 . 0,5632
11) 5,30795521 . 2,3039
12) 2,5 . 10,625 . 0,16 . 100
13) 2,5 . 0,08 . 0,625 . 1,6 . 12,5 . 04
14) 3,75 . 8,4 . 0,08 . 10,5
15) 0,3 . 2,4 . 3,5 . 4,6.

6. Division der Decimalbrüche.

Sollen Decimalbrüche durcheinander dividiert werden, so verwandle man den Divisor in eine ganze Zahl und rücke im Dividenden zugleich das Komma um so viele Stellen weiter nach rechts, als der Divisor Decimalstellen hat.

Sobald man im Dividenden bei der Division **über das Komma schreitet,** muß man im **Quotienten das Komma setzen,** da nach einem früheren Satze die erste Stelle **nach** dem Komma einen **zehnmal kleineren Lokalwert** hat und darnach auch der Lokalwert der betreffenden Ziffer im Quotienten zehnmal kleiner werden muß. Geht die Division nicht auf, so kann man die fehlenden Stellen im Dividenden durch Nullen ergänzen.

Die Division könnte auch auf folgende compliciertere Art erklärt werden:

1) Hat der Dividend mehr Decimalstellen als der Divisor, so multipliciert man Dividend und Divisor mit 10 oder 100, 1000 u. s. w., so daß der Divisor eine ganze Zahl wird. Dann werden im Quotienten von rechts nach links so viele Decimalstellen abgeschnitten, als der Dividend nach der Multiplikation noch hat.

2) Hat der Divisor mehr Decimalstellen als der Dividend, so werden ebenfalls Dividend und Divisor mit einer Potenz von 10 multipliciert, welche den Divisor (also auch den Dividend) zu einer ganzen Zahl macht.

3) Zwei Decimalbrüche werden dividiert wie ganze Zahlen, wenn sie gleich viele Decimalstellen haben.

Durch Anhängen von Nullen an den Dividend kann man die Division bis zu einer beliebigen Anzahl von Decimalstellen im Quotienten fortsetzen.

1) 75,36 : 24 = 3,14
```
75,36 : 24 = 3,14
72
--
 33
 24
 --
  96
  96
  --
   0
```

5,6088 : 4,56
```
560,88 : 456 = 1,23
456
----
1048
 912
 ----
 1368
 1368
 ----
    0
```

2) 983,09 : 0,2657
9830900 : 2657 = 3700
7971
18599
18599
----00

3) 24625,6383 : 347121
246256383 : 347121 = 723
2082726
798378
694242
1041363
1041363
0

Soll ein Decimalbruch durch 10, 100, 1000 u. s. w. dividiert werden, so hat man nur das **Decimalkomma um ein, zwei, drei u. s. w. Stellen nach links zu rücken.** Z. B.

14250,654 : 1000 = 14,250654.

Fragen und Beispiele.

1) Wie werden Decimalbrüche dividiert?
2) Wie wird ein Decimalbruch durch 10, 100 2c. dividiert?
3) 381,47 : 37
4) 36,301 : 31
5) 707,281 : 29
6) 1,30321 : 6859
7) 1132,7 : 4700
8) 9340,9 : 29000
9) 4632,004 : 10000
10) 6,859 : 3,61
11) 37,031 : 1,9
12) 9.8309 : 2,657
13) 387,420489 : 5,9049
14) 184,528125 : 9,1125
15) 83861 : 4,933
16) 9517 : 3,07
17) 16,1 : 0,35
18) 2,4 : 0,0048
19) 115,5 : 0,1848
20) 10,2 : 425
21) 357,911 : 0,071
22) 36,301 : 1,171
23) 95,903 : 3,307
24) 357911 : 0,071
25) 33579,2739063708 : 1205,677864

7. Multiplikation und Division der Decimalbrüche.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie wird ein algebraisches Produkt (Serie) berechnet?
2) 3,23 . 0,621 : 0,0437
3) 2,133 . 24,07 : 6,557
4) 703,1 . 62,31 : 827,7
5) 0,7221 . 86,33 : 7,743
6) 938,1 . 1,5811 : 0,25917
7) 0,02409 . 39,01 : 0,02739
8) 722,28 . 0,93729 : 7,2691
9) 3,75 . 7,28 : 0,25
10) 5,8 : 1,7 . 3,4 . 7,5

11) In einem Geschäfte werden täglich 3,75 l Petroleum gebraucht. Wie lange reicht man mit 1,125 hl und was kostet während dieser Zeit die Beleuchtung, wenn 1 l 0,2 M. kostet?

12) Ein Kaufmann nimmt im ersten halben Jahre 101887,5 M. ein und gewinnt davon den 75. Teil. Das gleiche Geschäft macht er im zweiten halben Jahre. Wie viel hat er am Schluße des Jahres als Gewinn zu verzeichnen?

13) Von einem Holzvorrate braucht man während 1 Woche täglich 0,125 cbm; wenn am Ende der Woche noch der sechste Teil vorhanden ist, wie viel ist es dann Holz?

14) In einer Familie, die 6 Köpfe zählt, rechnet man täglich per Kopf 0,75 M. Wie lange reicht diese Familie mit 121,5 M.?

15) Wie viel frs erhält man für 437,92 fl ö. W.?

8. Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche.

Ein gemeiner Bruch wird in einen Decimalbruch verwandelt, indem man ihn so erweitert, d. h. Zähler und Nenner mit einer solchen Zahl multipliciert, daß der Nenner eine Potenz von 10 wird.

Z. B. $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Man erreicht diesen Zweck immer, wenn man den Zähler des Bruches durch den Nenner dividiert.

Z. B. $\frac{5}{8} = 5{,}000 : 8 = 0{,}625$

Bei dieser Division können zwei Fälle eintreten:

a) Die Division geht auf und der erhaltene Decimalbruch ist ein **endlicher.** Der **Wert** des Decimalbruches ist **genau gleich dem Werte** des gegebenen Bruches.

Z. B. $\frac{3}{4} = 0{,}75$

Anm. Dieser Fall tritt immer ein, wenn sich der Nenner des gegebenen Bruches in ein Produkt zerlegen läßt, in welchem nur die Faktoren 2 oder 5, oder 2 und 5 vorkommen.

b) Die Division geht nicht auf und der erhaltene Decimalbruch ist ein **unendlicher.** Sein **Wert ist nicht genau gleich dem Werte** des gegebenen Bruches.

Z. B. $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$

c) Ein Decimalbruch, bei dem sich ein oder mehrere Ziffern regelmäßig wiederholen, heißt ein **periodischer Decimalbruch.**

Man teilt deßhalb die Decimalbrüche ein:

α) in **reinperiodische** Decimalbrüche, wenn die Periode gleich hinter dem Komma beginnt.

Z. B. $0{,}476476 \ldots = 0{,}\overline{476}$

$0{,}222 \ldots = 0{,}\overline{2}.$

β) in **unreinperiodische**, wenn nicht unmittelbar nach dem Komma die Periode beginnt, sondern derselben noch Ziffern vorausgehen.

Z. B. $0{,}3666 \ldots = 0{,}\underline{3}\overline{6}$ $\quad 0{,}152727 \ldots = 0{,}\underline{15}\overline{27}$

Fragen und Beispiele.

1) Wie werden gemeine Brüche in Decimalbrüche verwandelt?

2) Wie werden die Decimalbrüche eingeteilt?

3) Wann gibt ein gemeiner Bruch einen endlichen, wann einen periodischen Decimalbruch?

4) $\frac{7}{8} \quad \frac{73}{125} \quad \frac{19}{40} \quad \frac{67}{80}$

5) $\frac{13}{16} \quad \frac{31}{32} \quad \frac{59}{64} \quad \frac{93}{128}$

6) $\frac{8}{11} \quad \frac{17}{33} \quad \frac{14}{27} \quad \frac{29}{37} \quad \frac{31}{37}$

7) $\frac{2}{7} \quad \frac{1}{21} \quad \frac{2}{39} \quad \frac{3}{41} \quad \frac{35}{81}$

8) $\frac{13}{15} \quad \frac{17}{22} \quad \frac{35}{36} \quad \frac{15}{28} \quad \frac{23}{48}$

9) $\frac{3}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{5}{9}$

10) $\frac{7}{15} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{90} \quad \frac{1}{7}$

9. Verwandlung der Decimalbrüche in gemeine.

a) Die Verwandlung der endlichen Decimalbrüche in gemeine gibt sich von selbst aus der Entstehung der Decimalbrüche.

Z. B. $0{,}15 = \frac{15}{100} = \frac{15 : 5}{100 : 5} = \frac{3}{20}$

b) Bei der Verwandlung der reinperiodischen Decimalbrüche in gemeine schreibt man **die Ziffern der Periode als Zähler und als Nenner so viele Neuner, als die Periode Stellen hat.**

Z. B. $0,\overset{\frown}{45} = \frac{45}{99} = \frac{45 : 9}{99 : 9} = \frac{5}{11}.$

c) Ein unreinperiodischer (gemischtperiodischer) Decimalbruch wird auf folgende Weise in einen gemeinen verwandelt:

α) Man subtrahiere von den **Vorziffern und der Periode die Vorziffern. Die Differenz gibt den Zähler. Als Nenner setze man so viele Neuner, als die Periode Stellen hat und hänge derselben so viele Nullen an, als der Periode Vorziffern vorausgehen;**

$$0,\underline{3}\overset{\frown}{6} = \frac{36 - 3}{90} = \frac{33}{90} = \frac{11}{30}$$

$$1,\underline{15}27 = 1\frac{1527 - 15}{9900} = 1\frac{1512}{9900} = 1\frac{42}{275}$$

β) durch Multiplikation

$$1,\underline{15}\overset{\frown}{27} = 115\frac{27}{99} : 100 = 115\frac{3}{11} : 100$$

$$= \frac{1268}{11} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1268}{1100} = \frac{317}{275} = 1\frac{42}{275}$$

γ) durch Addition

$$1,\underline{15}\overset{\frown}{27} = 1\frac{15}{100} + \frac{27}{9900}$$

$$= 1\frac{15 \cdot 99 + 27}{9900} = 1\frac{1485 + 27}{9900}$$

$$= 1\frac{1512}{9900} = 1\frac{42}{275}$$

Anm. Kommen in einer Rechnung gemeine und Decimalbrüche vor, so werden in der Regel die gemeinen Brüche in Decimalbrüche verwandelt. Kommen mehr gemeine Brüche als Decimalbrüche vor und unter den letzten mehrere unendliche und periodische, so ist es genauer, die Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln.

$$\frac{1,\overset{\frown}{3} + 2\frac{5}{6} - 0,\overset{\frown}{16}}{\frac{7}{8} - 0,75 + 0,25} = \frac{1\frac{1}{3} + 2\frac{5}{6} - \frac{1}{6}}{0,875 - 0,75 + 0,25}$$

$$= \frac{4}{0,875 - 0,50} = \frac{4}{0,375} = \frac{4}{\frac{3}{8}} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Fragen und Beispiele.

1) Wie werden Decimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt?
2) Wie werden reinperiodische und wie unreinperiodische Decimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt?
3) 0,625 0,525 0,775 0,3125 0,3625 0,7375 0,08125 0,421875 0,078125
4) $0,\overparen{87}$ $0,\overparen{407}$ $0,\overparen{783}$ $0,\overparen{891}$ $0,\overparen{90243}$
5) $0,\underline{8}\overparen{11}$ $\underline{0},8\overparen{63}$ $0,\underline{4}\overparen{629}$ $0,\underline{52}\overparen{7}$ $0,\underline{57}\overparen{81}$
6) $0,\underline{2}\overparen{5}$ $0,\underline{5}\overparen{2}$ $0,\overparen{75}$
7) $0,3\overparen{2}$ $0,\overparen{312}$ 0,375
8) $0,\overparen{01}$ $0,\underline{0}\overparen{1}$ $0,\underline{00}\overparen{2}$ $0,\underline{4}\overparen{6}$
9) $0,\underline{0}\overparen{3}$ $0,\overparen{142857}$ $0,\overparen{72}$
10) $0,\overparen{285714}$ $0,\overparen{432098765}$.

10. Die vier Grundrechnungsarten mit Decimalbrüchen in Verbindung.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie wird ein Ausdruck der gemischten Art berechnet?
2) $220 - 100 + 0{,}436 + 0{,}564 : 1{,}2 - 9{,}906$
3) $1{,}43 + (3{,}403 + 0{,}04292 : 0{,}58) : (3356{,}1 - 36{,}85 : 0{,}011)$
4) $1{,}51 + (223{,}2127 + 0{,}220671 : 2{,}97) : (16{,}57 + 84{,}3591 : 8{,}67)$
5) $1{,}17 + (119{,}754 + 15{,}5946 : 1{,}974) : (153{,}703 + 13{,}0562 : 134{,}6)$
6) $23{,}1 + (6575{,}22151 - 3041{,}91 : 0{,}463) : (0{,}05444 + 0{,}130562 : 9{,}7)$
7) $19{,}4 + (16{,}073105 - 1{,}27654 : 0{,}083) : (0{,}011459 - 0{,}0234807 : 8{,}3)$
8) $1700 + (985{,}51 + 1923{,}57 : 2{,}871 - 410{,}681 : 4{,}63) : (0{,}246306 + 27{,}2976 : 290400 + 0{,}121302 : 52{,}74)$
9) $(1{,}37 + 0{,}071767 : 16{,}69 - 4{,}03 \,.\, 0{,}0941 - 0{,}7 \,.\, 0{,}17 \,.\, 7{,}9) : (405{,}39 - 0{,}81329 : 0{,}487 + 011 \,.\, 160{,}7) + 199987$

10) 26,87 + (1101,30023 — 0,233 . 42,1 + 98,089 : 0,47 — 451,1 : 0,347) : (3525,668 + 290 : 3,467 — 9,8383 : 265,9 — 2,3 . 1970)

11) (4,913 : 1,7 — 9,261 : 2,1 + 5,9319 : 0,39 + 0,0825 . 4,1) : (0,29791 : 0,031 — 1,2167 : 0,23 + 3,7 . 0,349)

12) (2,6221 : 2017 — 0,17 . 1,543 + 3,59301) : (333,07 : 1900 — 1,63 . 0,191 + 39,135393 : 108,9 + 0,006774 . 90)

13) (0,63 . 2,3 + 5 : 0,16 + 0,043 . 1300) : [0,235125 : (0,7125 : 7,5 — 1,615 : 1700)] + 89,5604

14) [901 : 0,17 — (0,33817 : 70 + 1,27 . 0,0647) — 418,31 : 59 + (3 — 4 : 0,125 + 0,93231 : 0,03)] : 4,073

15) 4 : 0,2 + 0,3 . 6,25 — 0,5 . 1,3 — 1,325

16) 3,75 . 0,4 — 0,3 : 0,01 + 75,05 . 0,8 — 0,54

17) (4,25 . 6,4 — 3,75 : 1,25) : 12,1

18) Ein Großhändler kauft 75,75 Ctr Getreide à 15 *M.* Wenn er nun 250 *M.* gewinnen will, wie teuer muß er nun den Ctr verkaufen?

19) Ein Weinwirt kauft 16,2 hl Wein à 1,2 *M.* per l. Wenn nun beim Transport 50 l zu Grunde gingen und dennoch 205,2 *M.* gewonnen werden sollen, was muß der Wirt für 1 l verlangen?

20) Ein Kaufmann ist gezwungen 70 kg à 3,21 *M.* zu verkaufen mit einem Verluste von 21,7 *M.* Wie teuer hatte er das kg gekauft?

11. Resolvieren mit Decimalbrüchen.

1) 0,2 Mark d. R. W. sollen in Pf. verwandelt werden.
0,2 . 100 = 20 Pf.

2) 6,5 Francs sollen in Centimes verwandelt werden.
6,5 . 100 = 650 Centimes.

3) Wie viele Monate, Tage, Stunden, Minuten und Sekunden sind 0,937625 Jahre?

0,937625 a	= 0,937625 . 12 Monate	= 11,251500 Monate
0,2515 Mon.	= 0,2515 . 30 d	= 7,5450 d
0,545 d	= 0,545 . 24 h	= 13,080 h
0,08 h	= 0,08 . 60′	= 4,80′
0,8′	= 0,8 . 60″	= 48″

Antwort: 0,937625 Jahre = 11 Monate 7 Tage 13 Stunden 4 Minuten 48 Sekunden.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie werden Decimalbrüche resolviert?
2) 6,25 Mark
3) 0,75 fl. öst. W.
4) 8,65 Francs.
5) 0,48 Monate
6) 2,25 Jahre
7) 8,3459 m
8) 6,4875 hl
9) 10,86421 kg
10) 0,625 Ballen Schreibpapier
11) 13,890625 Bll. Druckpap.
12) 0,0759379 km
13) 0,0093286439 ckm
14) 4,39186 kg
15) 0,75 £.

12. Reducieren mit Decimalbrüchen.

1) 9647 Pf. d. R. W. sollen in Mark reduciert werden!

9647 : 100 = 96,47 Mark.

2) 7215 Centimes sollen in Francs verwandelt werden!

7215 : 100 = 72,15 Francs.

3) Der wievielte Teil eines Jahres sind 11 Monate 7 Tage 13 Stunden 4 Minuten und 48 Sekunden?

48″ = 48 : 60 = 0,8′
4,8′ = 4,8 : 60 = 0,08 h
13,08 h = 13,08 : 24 = 0,545 d
7,545 d = 7,545 : 30 = 0,2515 Monate
11,1515 Monate = 11,2515 : 12 = 0,937625 Jahre.

Antwort: 11 Monate 7 Tage 13 Stunden 4 Minuten 48 Sekunden = 0,937625 Jahre.

Fragen und Aufgaben.

1) Wie werden benannte ganze Zahlen auf Decimalbrüche reduciert?
2) 67 Mark 45 Pf.
3) 120 fl. öst. W. 5 Nkr.
4) 60 Francs 17 Cent.
5) 6 Jahre 3 Monate 14 Stunden 6 Minuten.
6) 23 m 7 dm 8 cm 9 mm
7) 12 £ 15 s
8) 10 R°S 25 Kop.
9) 75 nkr.
10) 8 $ 32 cs
11) 4 qm 5 qdm 6 qmm
12) 4 kg 32 g 17 mg
13) 4 km 6 cm
14) 3 cbm 75 cmm
15) 2 cdm 5 ccm.

7. Uebungsaufgaben über die vier Grundrechnungsarten mit Decimalbrüchen und gemeinen Brüchen.

1) Man schreibe folgende Posten mit Decimalbrüchen an und bestimme die Summe:

a) 75	Francs	38	Centimes.	b) 24 fl. öst. W.	72 Nkr.
20	„	9	„	36 „ „ „	20 „
60	„	90	„	112 „ „ „	8 „
—	„	75	„	— „ „ „	80 „
—	„	5	„	— „ „ „	78 „

c) 26 Mark 90 Pf.	d) 24 m	— dm	8 cm	9 mm.
15 „ 87 „	6 „	2 „	4 „	4 „
16 „ 2 „	15 „	2 „	3 „	7 „
4 „ 9 „	16 „	2 „	— „	5 „

2) A kauft mehrere Stück einer Ware für 107,3 Mark, verkauft sie für 125,8 Mark und gewinnt dadurch 0,5 Mark per Stück. Wie viel Stücke sind es?

3) Ein Werk hat mehrere Bände, jeden Band zu 2,08 Buch und 9,25 Bogen Papier und enthält zusammen 4 Rieß 3 Buch und 5 Bogen Druckpapier. Aus wie viel Bänden besteht es?

4) A kauft 63 Stücke, das Stück zu 1,6 Mark und 75 Stücke, das Stück zu 2,1 Mark. Wie viel gewinnt er, wenn er die Ware im ganzen das Stück zu 1 Mark 90 Pf. verkauft?

5) A kauft von zweierlei Waren im ganzen 59 Stück für 416,1 M. Von der ersten Sorte sind es 24 Stück, das Stück zu 6,4 M. Was kostet 1 Stück der zweiten Sorte?

6) Der Schall pflanzt sich in 1 Sekunde 332,27 m fort; wenn nun zwischen Blitz und Donner 25 Sekunden verfließen, wie weit ist das Gewitter vom Beobachter entfernt?

7) Wie hoch sind die einzelnen Stufen einer Treppe zu machen, welche eine Höhe von 4,2 m und 24 Stufen erhalten soll?

8) Die Höhe einer Treppe soll 4 m 5 dm und die Höhe jeder Stufe 1 dm 8 cm betragen. Wie viel Stufen muß die Treppe erhalten?

9) An einer Maschine, welche 375,36 kg wiegt, ist $\frac{1}{6}$ von Holz, $\frac{1}{8}$ von Messing, der Rest von Eisen Wie viel kg und Dg sind von jedem Bestandteile dabei?

10) Wenn ein hl Roggen 22 Francs 40 Centimes kostet, wie viel kann man um 3360 Francs kaufen?

Zweiter Teil.

1. Schlußrechnungen.

Manche glauben, sehr viele Aufgaben lassen sich nur durch die Regel de tri lösen und halten deshalb die Proportion für die Seele der Arithmetik. In den meisten Fällen gelangt man jedoch durch die sogenannte **Schlußrechnung,** welche bloß die vier Grundrechnungsarten (species) voraussetzt, viel rascher zum Ziele.

Das Rechnen nach Schlüssen findet statt durch das **Zurückführen auf die Einheit und dann durch das Schließen von der Einheit auf die Mehrheit.** Z. B.

a) Wenn 9 Arbeiter zu einer Arbeit 10 Tage brauchen, wie lange brauchen 5 Arbeiter zu derselben Arbeit?

9 Arbeiter brauchen 10 Tage.

1 Arbeiter braucht 10 Tage . 9 Tage.

5 Arbeiter brauchen $\frac{\overset{2}{\cancel{10}} \cdot 9}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 18$ Tage.

b) Wenn 20 Arbeiter in 6 Tagen bei täglich 10 Stunden Arbeit 60 Thaler verdienen, wie viel werden unter gleichen Umständen 40 Arbeiter verdienen, welche 30 Tage und täglich 12 Stunden arbeiten?

Bedingungssatz:

20 Arbeiter verdienen in 6 Tagen bei 10 Stunden Arbeit 60 Thaler.

Fragesatz:

40 Arbeiter verdienen in 30 Tagen bei 12 Stunden Arbeit x Thaler.

20 Arbeiter verdienen	in 6 Tagen	bei 10 St.	täglich		60 Thlr.
1 „ verdient	„ 6 „	„ 10 „	„		$\frac{60}{20}$
1 „ „	„ 1 Tag	„ 10 „	„		$\frac{60}{20.6}$
1 „ „	„ 1 „	„ 1 „	„		$\frac{60}{20.6.10}$
40 „ verdienen	„ 1 „	„ 1 „	„		$\frac{60 . 40}{20.6.10}$
40 „ „	„ 30 „	„ 1 „	„		$\frac{60 . 40 . 30}{20.6.10}$
40 „ „	„ 30 „	„ 12 „	„		$\frac{60 . 40 . 30 . 12}{20.6.10}$

$$\frac{\overset{10}{60} . \overset{2}{40} . 30 . 12}{\underset{1}{20} . \underset{1}{6} . 10} = 720 \text{ Thaler}$$

oder

c) Bedingungssatz:

20 Arbeiter verdienen in 6 Tagen bei 10stündiger Arbeitszeit 60 Thaler

Fragesatz:

40 Arbeiter „ „ 30 „ „ 12 „ „ x „

$$x = \frac{\overset{10}{60} . \overset{2}{40} . 30 . 12}{\underset{1}{20} . \underset{1}{6} . 10} = 720$$ Thaler verdienen 40 Arbeiter in 30 Tagen bei 12stündiger Arbeitszeit.

Aufgaben.

1) Einem Diener wurden 200 Mark Jahreslohn zugesichert. Wie viel hat er zu beanspruchen, wenn er den Dienst gemäß Uebereinkommens nach $8\frac{1}{2}$ Monaten verläßt?

2) Wann kann eine Arbeit bei täglich 10stündiger Arbeitszeit fertig werden, wenn man zu ihrer Vollendung bei täglich 7 Stunden 30 Minuten Arbeitszeit 12 Tage nötig hat?

3) Wie viel erhält man von einer Ware für 2 Mark, wenn man 30 ℔ für 185 Mark 60 Pf. erhält?

4) Wie viele Rollen Tapeten von 12 qm 22 qdm braucht man zum Tapezieren eines Zimmers, wenn man von einer andern Sorte zu 3 qm 75 qdm 15 Rollen nötig hat?

5) Wenn 75 Arbeiter zu einer Arbeit 24 Tage brauchen, wie lange brauchen zu derselben Arbeit 96 Arbeiter?

6) $2\frac{1}{2}$ kg Garn geben 14 m 40 cm Leinwand. Wie viel geben 16 Zoll℔ Garn?

7) Ein Wirt schenkt durchschnittlich in einer Woche 16 hl 80 l Bier aus. Wie viel schenkt er in 17 Tagen aus?

8) Mit 100 Mark gewinnt man 12 Mark. Wie viel gewinnt man mit 55 Mark?

9) Für 27 Mark erhält man 15 kg. Wie viel erhält man für 72 Mark?

10) 136 Liter Aussaat geben 1088 Liter Ernte. Wie viel wird man von 96 Liter Aussaat ernten?

11) 4 Pferde brauchen 5 Ctr 20 kg Hafer. Wie viel brauchen 12 Pferde?

12) 6 Hektar Ackerland kosten 2250 Mark. Wie hoch kommen 22 Hektar?

13) Ein Stück Tuch von 24 m kostet 162 Mark. Wie teuer kommen 5 m?

14) Eine Magd hat 145 fl. öst. W. jährlichen Lohn, tritt aber nach 5 Monaten aus dem Dienst. Wie viel Lohn erhält sie?

15) 4 ℔ Schinken kosten 30 Francs 60 Centimes. Wie hoch kommt $\frac{1}{2}$ Zollzentner?

16) 15 Francs sind 12 Mark. Wie viele Mark sind 1200 Francs?

17) 6 fl. öst. sind 15 Francs. Wie viele Francs sind 474 fl. öst. W.?

18) Wie viele Francs sind 1092 Mark?

19) Wie viele Mark sind 5 Milliarden Francs?

20) Zu einem Kleide braucht man 6 m Stoff, wenn derselbe 40 cm breit ist. Wie viel ist nötig, wenn er 30 cm breit ist?

21) 12 Gesellen werden mit einem Bau in 30 Tagen fertig. In welcher Zeit bringen 15 Gesellen denselben zu stande?

22) Jemand hat eine Wiese, welche 90 m lang und 40 m breit ist; man will ihm eine andere dafür geben, welche 30 m breit ist. Wie lang muß diese sein?

23) In einem Ziegelstadel machen 3 Ziegelschläger jeder 1040 Steine täglich. Wie viele Steine werden 41 Ziegelschläger in 27 Tagen schlagen?

24) Wenn 3 Schneider in 2 Tagen 2 Mäntel machen. Wie viele Mäntel können in 9 Tagen von 5 Schneidern gemacht werden?

25) 4 Schuhmachergesellen können in 6 Tagen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten, 20 Paar Schuhe verfertigen. Wie viele Schuhe können in 24 Tagen von 9 Schuhmachern, welche täglich 12 Stunden arbeiten, gemacht werden?

26) 19 Maurer vermauern in 27 Tagen bei 11 stündiger Arbeit 395010 Steine. Wie viele Steine werden 3 Maurer in 4 Tagen bei 10 Stunden Arbeit vermauern?

27) Wie viele Zentner Fleisch brauchen 640 Mann in 30 Tagen, wenn 8 Mann in 3 Tagen $6\frac{3}{4}$ ℔ nötig haben?

28) 9 Mann haben in 30 Tagen 810 Mark verdient. In welcher Zeit werden bei gleichem Lohne 12 Mann 3000 Mark verdient haben und was erhält 1 Mann täglich?

29) Wie viele Mark d. R. W. kosten 10 Ballen 5 Ries Schreibpapier, wenn 12 Bogen 25 Centimes kosten?

30) Was kostet a) in Franken-W. und b) in öst. W. der Bogen Schreibpapier, wenn der Bogen 5 Pf. d. R. W. kostet?

31) 360 Arbeiter können in 3 Monaten, wenn sie wöchentlich 5 Tage und täglich 8 Stunden arbeiten, 48 Morgen waldiges Erdreich urbar machen. Wie viel werden 250 Mann in 2 Monaten leisten, wenn sie wöchentlich 6 Tage und täglich 6 Stunden arbeiten?

32) Wie lange reicht eine Frau mit ihrem Kaffeevorrat bei einem täglichen Verbrauche von 3 Dgr, wenn sie mit demselben Vorrate bei einem Verbrauche von 91 Dgr 5 g ein Monat ausreicht?

33) Wie viele bayr. Ellen geben 42 m 5 dm, wenn 5 m = 6 bayr. Ellen sind?

34) Ein Kaufmann erhält 7 Zollztr. 25 kg Brutto. Was beträgt das Nettogewicht, wenn 20% Tara per Zentner gerechnet werden?

35) Für eine Buchhändlerrechnung im Betrage von 8 Mark wurde 6 Mark 50 Pf. bar bezahlt. Wie viel % Rabatt (v. Hundert) wurden gerechnet?

36) Wie teuer muß ein Kaufmann den Meter einer Ware verkaufen, wenn er bei 7 Mark 50 Pf. eigener Auslage 20% gewinnen will?

37) Zu wie viel Procent rentiert sich ein Haus, welches um 16000 Mark gekauft wurde, wenn es nach Abzug der Unterhaltungskosten jährlich 800 Mark einträgt?

38) Wie viele Meter Leinwand von $1\frac{1}{2}$ m Breite braucht man zu 36 Hemden, wenn man aus einem Stück von 60 m bei $1\frac{1}{4}$ m Breite 20 Hemden von derselben Größe verfertigen kann?

39) In welcher Zeit können 30 Maurer bei täglich 9stündiger Arbeitszeit ein Gebäude aufführen, zu welchem 12 Maurer bei 10 Stunden Arbeitszeit 22 Wochen und 3 Tage brauchen?

40) Wie viel Oel brauchen 50 Lampen, welche jede Nacht 6 Stunden brennen, wenn 40 Lampen derselben Art, welche jede Nacht 5 Stunden brennen, 30 ℔ verzehren?

41) Wie viel Heu brauchen 84 Pferde in einem Vierteljahre, wenn 7 Pferde in 15 Tagen 4 Ctr 25 kg nötig haben?

42) Wenn jemand täglich $\frac{1}{4}$ Liter Wein trinkt, reicht sein Vorrat 2 Monate und 15 Tage. Wie lange reicht er, wenn er täglich $\frac{3}{4}$ Liter trinkt?

43) Für 1 öst. Gulden bekommt man 2 kg 50 g. Wie viel für 12 Mark?

44) 10 Stücke einer Ware kosten 25 Mark 18 Pf. Wie teuer ist davon a) das Hundert b) das Tausend?

45) Mit 9 cbm Scheitholz reicht man zum Feuern 15 Wochen 3 Tage. Wie lange reicht man mit 14 cbm?

2. Verhältnisse und Proportionen.

1. Erklärungen.

Zwei Zahlen lassen sich in Beziehung auf ihre Größe in doppelter Art miteinander vergleichen. Man kann untersuchen:

1) **um wieviel,**
2) **wie vielmal eine Zahl größer ist als die andere.**

1) Wenn man untersucht, **um wieviel** die eine Zahl größer ist als die andere, was bekanntlich durch die **Subtraktion** geschieht, so setzt man dieselben in ein **arithmetisches Verhältnis.**

Z. B. 8 — 5 (lies 8 verhält sich arithmetisch zu 5).

Das arithmetische Verhältnis ist gleichbedeutend mit einer formellen Differenz. 8 heißt das Vorderglied, 5 das Hinterglied. Je nachdem das Vorderglied kleiner oder größer ist als das Hinterglied, hat man steigende oder fallende Verhältnisse.

Der Wert eines arithmetischen Verhältnisses wird immer bestimmt durch seine Differenz.

Man versteht darunter diejenige Zahl, welche zum Hinterglied addiert das Vorderglied als Summe gibt. (Wirkliche Differenz).

Die Differenzen aller fallenden arithmetischen Verhältnisse sind **positive** Zahlen; die Differenzen der steigenden arithmetischen Verhältnisse sind immer **negative** Zahlen.

Z. B. 8 — 5 Differenz = + 3
5 — 8 „ = − 3

Ein arithmetisches Verhältnis bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man zum Vorderglied und Hinterglied dieselbe Zahl addiert, oder von beiden Zahlen dieselbe subtrahiert.

Z. B.
$$8 - 5$$
$$= (8 + 3) - (5 + 3)$$
$$= 11 - 8 \quad \text{Differenz} = +3$$
$$8 - 5$$
$$= (8 - 3) - (5 - 3)$$
$$= 5 - 2 \quad \text{Differenz} = +3$$

2) Wenn man untersucht, **wie vielmal** eine Zahl größer ist, als die andere, was durch die **Division** geschieht, so setzt man die Zahlen in ein **geometrisches Verhältnis.**

Z. B. 8 : 4 (lies 8 verhält sich geometrisch zu 4).

Das **geometrische Verhältnis** ist also gleichbedeutend mit einem **formellen Quotienten.**

Der **Wert** eines geometrischen Verhältnisses wird durch den **Exponenten** bestimmt; man versteht darunter diejenige Zahl, mit welcher das Hinterglied multipliciert das Vorderglied zum Produkt gibt. (Wirklicher Quotient.)

Die **Exponenten** der fallenden geometrischen Verhältnisse sind immer **größer als** 1, die der steigenden geometrischen Verhältnisse stets **kleiner als** 1.

Z. B. 8 : 4 Exponent = 2
4 : 8 „ = $\frac{1}{2}$.

Ein geometrisches Verhältnis bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliciert oder dividiert. Man kann nach diesem Satze jedes geometrische Verhältnis, in welchem Brüche vorkommen, in ein anderes mit ganzen Zahlen dadurch verwandeln, daß man die Glieder mit dem gemeinschaftlichen Nenner der Brüche multipliciert.

Z. B. $3\frac{3}{4} : 5\frac{1}{2} = \frac{15}{4} : \frac{22}{4} = 15 : 22.$

2. Arithmetische Proportionen.

Wenn man zwei arithmetische Verhältnisse mit gleicher Differenz durch das Gleichheitszeichen verbindet, so entsteht eine arithmetische Proportion.

z. B. $24 - 8 = 20 - 4$

24 und 4 sind die äußern Glieder,

8 und 20 „ „ inneren „

ferner sind 24 und 20 die Vorderglieder,

8 „ 14 die Hinterglieder.

Je zwei oder mehrere Vorderglieder und je zwei oder mehrere Hinterglieder heißen homologe (gleichstehende) Glieder.

Hauptsatz.

In einer richtigen arithmetischen Proportion ist die Summe der beiden äußeren Glieder gleich der Summe der beiden inneren Glieder.

z. B. $24 - 8 = 20 - 4$

$24 + 4 = 8 + 20 = 28$

Ein unbekanntes äußeres Glied ist also gleich der Summe der beiden inneren Glieder minus das bekannte äußere Glied.

z. B. $25 - 23 = 13 - x$

$x = 23 + 13 - 25 = 11.$

Eine Proportion, in der die beiden mittleren Glieder einander gleich sind, heißt eine stetige Proportion.

z. B. $12 - 8 = 8 - 4.$

Das mittlere Glied 8 heißt arithmetisches Mittel zu den äußeren Gliedern. Dasselbe ist immer gleich der halben Summe der gegebenen Zahlen.

z. B. $17 - x = x - 3$

$2x = 17 + 3$

$x = \frac{17 + 3}{2} = 10.$

Das arithmetische Mittel zu mehreren Zahlen ist gleich der Summe dieser Zahlen dividiert durch ihre Anzahl.

z. B. 1) Man gebe von folgenden Zahlen: 36, 2, 12, 18, 24, 10 das arithmetische Mittel an.

Das arithmetische Mittel dieser Zahlen

$= \frac{36 + 2 + 12 + 18 + 24 + 10}{6} = \frac{102}{6} = 17$

2) Der höchste Schrannenpreis vom Hektoliter Weizen sei 18 Mark 80 Pf., der niedrigste 16 Mark 70 Pf., welches ist der Durchschnittspreis?

$\frac{18,8 + 16,7}{2} = \frac{35,5}{2} = 17,75$ Mark $= 17$ Mark 75 Pf. ist der Durchschnittspreis des Hektoliters Weizen.

Aufgaben.

1) Man suche die Unbekannte aus folgenden arithmetischen Proportionen:

a) $904 - 837 = 265 - x$

b) $1387 - 1098 = 562 - x$

c) $2463 - x = x - 91$

d) $68 - 1029 = x - 1354$

$742 - 1358 = x - 969$

$538 - x = x - 4726.$

2) Das Jahr 1 der christlichen Zeitrechnung ist das Jahr 754 seit der Gründung Roms; welches Jahr der römischen Zeitrechnung ist das Jahr des Untergangs des weströmischen Reiches 476 nach Christus?

3) Constantin der Große wurde im Jahre 306 der christlichen Zeitrechnung zum Kaiser ausgerufen; in welchem Jahre der römischen Zeitrechnung?

4) Wenn es in Regensburg 10 Uhr 3 Minuten ist, so ist es in London 9 Uhr 17 Minuten; wie viel Uhr ist es in London, wenn Regensburg halb 3 Uhr nachmittags hat?

5) Zwei Reisende gehen miteinander; der eine hat $14\frac{3}{4}$ Meilen, der andere $18\frac{1}{2}$ Meilen nach seinem Bestimmungsort; wie weit wird der letztere noch zu gehen haben, wenn der erstere sich dem Orte seiner Bestimmung bis auf $4\frac{3}{4}$ Meilen genähert hat?

3. Geometrische Proportionen.

Wenn man zwei geometrische Verhältnisse mit gleichem Exponenten versieht, so entsteht eine geometrische Proportion.

Hauptsatz.

Das Produkt der äußeren Glieder ist gleich dem Produkte der beiden inneren Glieder.

$$3 : 9 = 16 : 48$$
$$3 . 48 = 9 . 16$$
$$144 = 144$$

Es läßt sich jede Proportion als Produktengleichung anschreiben, und umgekehrt läßt sich aus einer Produktengleichung eine Proportion bilden.

Z. B. $3 . 15 = 9 . 5$
$3 : 9 = 5 : 15$

Die Faktoren des einen Produktes geben die äußeren, die des anderen Produktes die inneren Glieder.

Ein unbekanntes äußeres Glied ist also gleich dem Produkte der beiden inneren Glieder dividiert durch das bekannte äußere Glied.

$$6\frac{3}{4} : 3\frac{3}{8} = 6 : x$$

$$x = \frac{3\frac{3}{8} . 6}{6\frac{3}{4}} = \frac{27 . 6 . 4}{8 . 27} = 3.$$

Eine geometrische Proportion heißt stetig, wenn die beiden mittleren Glieder einander gleich sind.

Z. B. $12 : 6 = 6 : 3$
oder $12 : 6 : 3$

6 ist das geometrische Mittel zwischen 12 und 3.

Das geometrische Mittel ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkte der beiden bekannten Zahlen.

Anm. Unter der Quadratwurzel einer Zahl versteht man diejenige Zahl, welche mit sich selbst multipliciert, die vorgelegte Zahl gibt.

Z. B.

$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{49} = 7$	

Beispiel einer stetigen Proportion:

$$18 : x = x : 8$$
$$x^2 = 8 . 18 = 144$$
$$x = \sqrt{144} = 12$$

Versetzungen der Glieder einer geometrischen Proportion.

(8 Formen.)

16 : 4 = 20 : 5	20 : 5 = 16 : 4
16 : 20 = 4 : 5	20 : 16 = 5 : 4
5 : 4 = 20 : 16	4 : 16 = 5 : 20
5 : 20 = 4 : 16	4 : 5 = 16 : 20

Veränderungen, die sich bei den Gliedern einer Proportion vornehmen lassen, ohne deren Richtigkeit zu stören.

a) Man kann alle Glieder mit der gleichen Zahl multiplicieren oder dividieren.

Z. B. 4 : 24 = 6 : 36
(multipliciert mit 2) 8 : 48 = 12 : 72
(dividiert durch 2) 2 : 12 = 3 : 18

b) Man kann ein äußeres oder ein inneres Glied mit der gleichen Zahl multiplicieren oder dividieren. (Dagegen darf man nie zwei äußere oder zwei innere Glieder mit der gleichen Zahl multiplicieren oder dividieren.)

4 : 24 = 6 : 36
8 : 24 = 12 : 36
4 : 12 = 6 : 18

Anm. 1. Die Glieder desselben Verhältnisses haben immer gleiche Benennung.

Anm. 2. Die Exponenten derselben Verhältnisse sind immer unbenannte Zahlen.

c) In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe des ersten und zweiten Gliedes zur Summe des dritten und vierten Gliedes wie zwei homologe Glieder.

Z. B. 4 : 12 = 5 : 15
(4 + 12) : (5 + 15) = 4 : 5 oder (4 + 12) : (5 + 15) = 12 : 15
16 : 20 = 4 : 5 oder 16 : 20 = 12 : 15

d) In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

3 : 12 = 5 : 20
(3 + 5) : (12 + 20) = 3 : 12 oder (3 + 5) : (12 + 20) = 5 : 20
8 : 32 = 3 : 12 oder 8 : 32 = 5 : 20

e) in einer continuirlichen Proportion verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Z. B. $4 : 14 = 8 : 28 = 6 : 21 = 10 : 35$

$$(4 + 8 + 6 + 10) : (14 + 28 + 21 + 35) = 4 : 14$$
$$28 : 98 = 4 : 14$$
$$= 8 : 28$$
$$= 6 : 21$$
$$= 10 : 35$$

Anm. Unter einer continuirlichen Proportion versteht man die Gleichnng mehrerer geometrischer Verhältnisse mit gleichen Exponenten. Aus mehreren richtigen Proportionen erhält man eine neue richtige Proportion dadurch, daß man die gleichstehenden Glieder miteinander multipliciert.

$$\begin{array}{r} 4 : 2 = 12 : 6 \\ 2 : 3 = 6 : 9 \\ 5 : 10 = 3 : 6 \\ 12 : 4 = 9 : 3 \\ \hline \end{array}$$

$$(4 . 2 . 5 . 12) : (2 . 3 . 10 . 4) = (12 . 6 . 3 . 9) : (6 . 9 . 6 . 3)$$
$$480 : 240 = 1944 : 972.$$

f) Zwei Verhältnisse einem dritten gleich, sind auch unter sich gleich.

Z. B. $$\begin{array}{r} 16 : 4 = 24 : 6 \\ 36 : 9 = 24 : 6 \\ \hline 16 : 4 = 36 : 9 \end{array}$$

g) Sind in 2 Proportionen je 3 Glieder einander gleich, so sind auch die vierten Glieder einander gleich.

Z. B. $$\begin{array}{r} 16 : 8 = x : 24 \\ 16 : 8 = y : 24 \\ \hline \end{array}$$

$$x = y = \frac{24 . 16}{8} = 48$$

Das unbekannte Glied einer Proportion nennt man die 4. mittlere Proportionale zu den drei gleichbenannten Zahlen.

Beispiele der geometrischen Proportion.

a) $63 : 21 = 45 : x$

$$x = \frac{21 . 45}{63} = \frac{3 . 45}{9} = 15$$

b) $7,2 : 63 = 0,88 : z.$

$$z = \frac{63 . 0,88}{7,2} = \frac{7 . 0,88}{0,8} = \frac{7 . 0,11}{0,1} = \frac{7 . 1,1}{1} = 7,7$$

c) $9\frac{1}{3} : 4\frac{2}{7} = 5\frac{1}{4} : y$

$2\frac{5}{8} : 1\frac{1}{6} = y : x$

$(9\frac{1}{3} \cdot 2\frac{5}{8}) : (4\frac{2}{7} \cdot 1\frac{1}{6}) = (5\frac{1}{4} \cdot y) : (y \cdot x)$

$= (\frac{28}{3} \cdot \frac{21}{8}) : (\frac{30}{7} \cdot \frac{7}{6}) = 5\frac{1}{4} : x$

$$x = \frac{\frac{30}{7} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{21}{4}}{\frac{28}{3} \cdot \frac{21}{8}}$$

$$= \frac{\overset{15}{\cancel{30}} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{21} \cdot 3 \cdot \overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{7} \cdot \underset{2}{\cancel{6}} \cdot \cancel{4} \cdot \underset{14}{\cancel{28}} \cdot \cancel{21}} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}.$$

Aufgaben.

1) Man gebe die Exponenten folgender geometrischer Verhältnisse an:

a) $\frac{4}{5} : 8$ b) $9 : 1\frac{1}{2}$ c) $3\frac{5}{8} : 5\frac{7}{16}$ d) $8{,}64 : 0{,}18$.

2) Folgende geometrische Verhältnisse sollen durch die möglich kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt werden:

a) $3\frac{2}{5} : 34$ b) $41 : 5\frac{1}{8}$ c) $2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{3}$ d) $5\frac{5}{8} : 4\frac{1}{2}$

e) $0{,}25 : 5$ f) $6 : 1{,}8$ g) $7{,}29 : 8{,}12$.

3) Verwandle folgende geometrische Verhältnisse in solche, deren Vorderglied 1 ist:

a) $4 : 17$ b) $\frac{3}{4} : \frac{5}{8}$ c) $9\frac{3}{5} : 24$ d) $0{,}4 : 5$.

4) Verwandle folgende geometrische Verhältnisse in solche, deren Vorderglied 1 ist:

a) $5 : 4$ b) $\frac{3}{4} : 6$ c) $5 : \frac{1}{3}$ d) $2\frac{3}{4} : 2\frac{1}{3}$ e) $0{,}12 : 10$

f) $54{,}34 : 2{,}2$.

5) Welches ist das Hinterglied des geometrischen Verhältnisses, dessen Vorderglied

a) 6	und dessen Exponent	a) 3
b) 0,4		b) 5
c) $\frac{3}{4}$		c) 3
d) $2\frac{1}{8}$		d) 8,5 ist?

6) Welches ist das Vorderglied des geometrischen Verhältnisses, dessen Hinterglied a) 4 b) $\frac{3}{5}$ c) 0,02 d) $2\frac{1}{5}$ und dessen Exponent a) 8 b) 10 c) $2\frac{1}{2}$ und d) 0,5 ist?

7) Aus den Zahlen 4,125, $\frac{3}{25}$, $1\frac{4}{5}$ und 0,275 sollen Proportionen a) mit fallenden, b) mit steigenden Verhältnissen gebildet werden.

8) Die Proportion $4 : 14 = 2 : 7$ soll in acht Formen und $16 : 8 = 8 : 4$ soll in vier verschiedenen Formen angeschrieben werden.

9) Man bilde aus nachstehenden je zwei gleichen Quotienten zwei geometrische Proportionen, eine mit fallendem und eine mit steigendem Verhältnisse.

10) Man bilde aus nachstehenden je zwei gleichen Quotienten zwei geometrische Proportionen, eine mit fallenden und eine mit steigenden Verhältnissen:

a) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ b) $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$ c) $\frac{5}{9} = \frac{10}{18}$

11) Die Proportion $3\frac{2}{15} : 0,804 = x : 1\frac{2}{5}$ soll ohne Aenderung des dritten Gliedes in eine Proportion aus ganzen Zahlen verwandelt werden.

12) Man suche die vierte Proportionale zu

a) 9 4 27 b) 0,5 $2\frac{6}{8}$ 6 c) $4\frac{1}{4}$ 8,5 0,1.

13) Man suche die dritte Proportionale zu

a) 16 und 12 b) $\frac{3}{4}$ und $4\frac{1}{2}$ c) 0,04 und 6

14) Man suche in folgenden Proportionen das unbekannte Glied:

a) $0,45 : x = 2\frac{3}{7} : 3\frac{7}{9}$

b) $x : 48 = 35 : 28$

c) $x : 22,5 = \frac{7}{12} : \frac{15}{16}$

d) $2\frac{3}{19} : 0,04 = x : 7,6$

e) $0,3696 : 0,0561 = x : 20,4$

f) $1\frac{2}{17} : 0,864 = 2\frac{1}{9} : x$

g) $2,24 : 3,4 = 6\frac{10}{17} : x$

15) Die drei Proportionen

$$\left.\begin{array}{l} 2 : 8 = 1 : 4 \\ 5 : 15 = 4 : 12 \\ 3 : 6 = 12 : 24 \end{array}\right\}$$

sollen durch Multiplikation zu einer Proportion vereinigt werden.

16) Die beiden Proportionen

$$\left.\begin{array}{l} 5 : 2 = 10 : 4 \\ 1 : 6 = 5 : 30 \end{array}\right\}$$

sollen durch Division in eine Proportion vereinigt werden.

17) Aus folgenden Gruppen berechne man auf die einfachste Weise x.

a) $2\frac{1}{3} : y = 5\frac{1}{2} : x$ c) $y : 7{,}2 = 18\frac{2}{3} : 9\frac{1}{3}$

$2 : y = 1{,}1 : 4\frac{1}{5}$ $13 : z = 5{,}4 : y$

b) $y : x = \frac{3}{40} : 1{,}2$ $9{,}75 : 2\frac{5}{8} = z : x$

$\frac{8}{9} : 0{,}4 = 10 : y$

18) Die geographische Meile hält 7 km 4 hm 7 m 4 dm 1 cm, die bayerische Meile 7415 m 9 mm. Wie viele geographische Meilen geben 100 bayerische Meilen?

19) Ein silberner Pokal wiegt 4 Mark, was würde ein goldener von gleicher Größe wiegen, wenn sich das specifische Gewicht des Goldes zu jenem des Silbers wie 137 : 71 verhält?

20) Wenn die Luft auf eine Fläche von 135 qcm einen Druck von 140,4 kg ausübt, auf welcher Fläche lastet ein Druck von 254,8 kg?

21) Wenn 6 Mark 3 fl. öst. W. sind, wie viele Mark sind 4800 fl. öst. W.?

22) Wenn 15 Francs = 12 Mark sind, wie viele Mark sind 60000 Francs?

23) Aus einem Wasserbehälter von 4,5 cubm Inhalt fließen alle $2\frac{1}{2}$ Minuten 15 Liter Wasser ab. In welcher Zeit wird der Behälter leer sein?

24) Wenn $20\frac{1}{2}$ kg 176 Francs 30 Centimes kosten, wie viel hat man für 175 Zollctr. zu bezahlen?

25) Wenn ein österr. Staatspapier den Cours $85\frac{1}{4}$ hat, wie viel sind 1200 fl. östr. W. jenes Papieres in Silber wert?

26) Wenn eine östr. 100 fl.-Obligation auf $60\frac{1}{2}$ steht, wie viel Papier erhält man für 24200 Mark d. Reichswährung?

3. Kettensatz.

Der **Kettensatz, auch Kettenregel oder Rees'scher Ansatz** genannt, wird irrtümlich einem holländischen Kaufmann de Rees zugeschrieben. Der Kettensatz findet sich übrigens schon in Lehrbüchern, welche der bekannte Rechenmeister Adam Riese verfaßte. Eine praktische Bedeutung erlangte die Kettenregel erst in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, indem dieselbe in kaufmännischen Rechnungen Anwendung fand. **In Aufgaben, in denen Münzen, Maße und Gewichte des einen Landes in Münzen, Maße und Gewichte des andern Landes umgerechnet werden sollen, also in Aufgaben oder Rechnungen,**

in denen es sich um fortlaufende Reduktionen gleicher Werte in andere Benennungen handelt, wird der sogenannte Kettensatz mit Vorteil angewendet, weil man dadurch auf die einfachste und bequemste Weise das gewünschte Resultat erhält. Bei dieser Gelegenheit kann jedoch nicht in Abrede gestellt werden, daß der Kettensatz oder die Kettenregel leicht zu einem gewissen Mechanismus führt und gerade deshalb in Schulen nicht gebraucht werden soll. Nur insoferne ist die Anwendung dieser Rechnungsart zu rechtfertigen, als die gewöhnlichen Auflösungsweisen durch die Schlußrechnung zu Weitläufigkeiten führt. Man hat deshalb aus der weitläufigen Ausrechnungsweise eine kürzere, freilich aber auch eine mechanische und daher an geistbildenden Momenten wenig reiche Methode eine praktische Regel abgeleitet, die wegen der eigentümlichen Anordnung der den Ansatz bildenden Glieder **Kettenregel** genannt wird.

Beispiele.

1) Wie viele öst. Gulden sind 100 Rubel, wenn 53,55 *M.* = 6 Dukaten und 3 Rubel = 1 Dukaten sind?

	25
	50
öst. fl.?	100 Rubel
3 Rubel	1 Dukaten
1	5,95
	17,85
6 Dukaten	53,55 Mark
3	
1	
2 Mark	1 öst. fl.
1	
	25 . 5,95
	138,75 öst. fl. sind 100 Rubel.

2) Wie viele Doppelkronen betragen die von Frankreich bezahlten 5 Milliarden Franken Kriegsentschädigung, wenn 5 Centimes = 4 neue Pfennige gerechnet werden?

Dkr ?	5000000000 frs
	20
1 fr	100 cs
	2
5 cs	4 ₰
2000 ₰	1 Dkr
	2 . 20 . 5000000
	40 . 5000000
	200000000 Doppelkronen Deutsche

Reichswährung betragen die von Frankreich bezahlten 5 Milliarden Kriegsentschädigung.

Aufgaben.

1) Wie viele Pfennige kostet 1 ℔ in Dresden, wenn $84\frac{1}{2}$ kg $204\frac{1}{4}$ frs kosten und 100 frs = $84\frac{1}{2}$ ℳ sind?

2) Wie viele Gulden kostet in Wien 1 m, wenn $136\frac{1}{2}$ Yards in London mit 51 £ 3 s 9 d bezahlt werden? (1 £ = 11,5 fl; 1 Yard = 0,91438 m).

3) In den Bergwerken am Ural wurden in einem Jahre 392 Pud 37 ℔ Gold gewonnen. Wie viele 20-Markstücke könnte man daraus prägen, da 1 ℔ russ. = 409,512 g und $69\frac{3}{4}$ 20-Markstücke = 500 g sind?

4) Wie teuer kommt 1 Stück engl. Zinnblech, wenn die Kiste von 205 Stück in London mit 41 s bezahlt wird und 1 £ = 20,48 ℳ gerechnet wird?

5) Welchen Wert hat 1 £ in deutscher Markwährung, wenn 1869 £ 40 Troypfund Standardgold haben, 12 Troypfd. St.-G. = 11 Troypfd. f. G., 373,242 g = 1 Troypfd., 500 g f. G. = 1395 ℳ?

6) Wie viele Pfennige kostet 1 Bogen, wenn 24 Ballen 2304 ℳ kosten?

7) Ein Tabakfabrikant in Paris erhält Tabak aus Köln, per kg in Köln 1,8 ℳ; an Fracht und Unkosten zahlt er 10% vom Einkaufspreise. Wie hoch kommt 1 kg in frs zu stehen?

8) Wie viel öst. Gulden hat man für 6 Stück Tücher zu zahlen, wenn 13 Dutzend 78,5 ℳ kosten?

9) 174 holl. Pfund kosten $96\frac{2}{3}$ holl. Gulden. Wie teuer in preußischem Geld ist 1 kg, wenn die Unkosten 5% betragen, 250 fl. holl. = 435 ℳ, 1 ℔ holl. = 1 kg?

10) Wie viel frs geben $6\frac{3}{4}$ £, wenn 1 Mk f. D = 44,69 sh = 51,934 frs?

11) Wenn man in Crefeld den Stab (115 cm) Sammet zu 13 ℳ berechnet, wie viel östr. Gulden (à 2 ℳ) kosten dann a. 1; b. 120 Wiener Ellen?

12) Jemand kauft in Amsterdam 800 Pfd. Ware für 84 holländ. Gulden. Wie teuer kommt ihm das kg in ℳ und ₰ zu stehen, wenn $8\frac{1}{2}$ kg 16 Amsterdamer Pfund sind? —

13) Ein Kaufmann erhält 12 Kisten Citronen, in jeder Kiste sind 280 Stück; für 20 Stück muß er 1 holl. Gld. bezahlen. Wie viel macht der Betrag in ℳ und ₰?

14) Jemand übergab einer Spinnerin 480 Pfd. Flachs. Für je 3 Pfd. Flachs erhielt er 17 Stück Garn. Mit dem erhaltenen Garn geht er zum Weber und erhält für 5 Stück Garn 2 m Leinwand. Das Leinen bringt er zum Kaufmann, der ihm für $3\frac{1}{2}$ m 3,25 ℳ gibt. Wie viel Geld hat er aus dem Flachs gelöst? —

15) Auf 1 a wachsen im Durchschnitt $30\frac{3}{4}$ l Roggen. Der Schfl. wiegt 78 Pfd.; 6 Pfd. Roggen geben 7 Pfd. Brod. Wenn nun eine Haushaltung wöchentlich 8 7pfündige Brode nötig hat, wie viel a müssen dann mit Roggen besäet werden, um das Brodkorn für 1 Jahr zu ziehen? —

16) Ein Kaufmann bezieht aus England 725 Yards Wollen-Waren für 32 Pfd. Sterling 15 Schill.-Sterl. — Wie hoch beläuft sich der Einkaufspreis für 1 m in a. ℳ und ₰ b. holl. Gulden; c. Francs?

17) Wenn 100 engl. Centner Gußstahl in England mit 25 Pfd. Sterling bezahlt werden, wie teuer ist dann 1 kg a. in ℳ und ₰; b. in holl. Gulden; c. in Francs?

18) Wenn 1000 kg Schweinefleisch in Nord-Amerika für 96 Doll. zu haben sind, wie teuer ist dann 1 kg in a. ℳ und ₰; b. holl. Gulden; c. Francs; d. 1 engl. Pfd. in engl. Gelde?

19) Jemand kauft in Bordeaux 12 hl Wein à 150 Frcs., wie viel ℳ kostet demnach 1 Flasche, welche $\frac{4}{5}$ l enthält?

20) Eine Crefelder Seidenfabrik sendet nach Holland 600 brab. Ellen Seide und berechnet den Stab (115 cm) zu 7 ℳ Wie viel holl. Gulden kostet a. die ganze Sendung; b. 1 brab. Elle? —

4. Teilungsrechnungen.

Die Verteilungsrechnung, auch Repartitions- oder Gesellschaftsrechnung genannt, hat zur Aufgabe, eine Zahl nach gewissen gegebenen Bestimmungen oder Verhältnissen zu teilen. Die zu teilende Zahl heißt Hauptsumme oder Teilungssumme. Die Zahlen, welche angeben, wie die Teilungssumme geteilt werden soll, heißen Verhältniszahlen (Bestimmungszahlen). Die einzelnen Teile, in welche die Teilungssumme geteilt wird, heißen Anteile. Die Verteilungsrechnung findet hauptsächlich Anwendung im Kompagniehandel, bei Erbschaften, Steuern,

Falliments (Ganten), Versicherungen, bei der Bereitung und Zersetzung von Kunstprodukten u. s. w.

Wenn eine Zahl nach gegebenen Verhältnissen in Teile zerlegt werden soll, so erhält man diese dadurch, daß man die zu teilende Zahl durch die Summen der Verhältniszahlen dividiert und den erhaltenen Quotienten mit jeder Verhältniszahl multipliciert.

Nach der Proportionslehre lautet diese Regel:

Die Summe der zu teilenden Verhältniszahlen verhält sich zu jeder einzelnen Verhältniszahl wie die zu teilende Größe zu x.

Sind die Verhältniszahlen Brüche oder gemischte Zahlen, so kann man durch Multiplikation mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen ihre Nenner in ganze Zahlen umformen. In manchen Fällen ist dieses jedoch nicht nötig.

Beispiele.

100,80 *M.* sollen unter 3 Personen so verteilt werden, daß A $\frac{1}{4}$, B $\frac{1}{3}$ und C den Rest erhält. Wie viele Mark bekommt jeder?

Auflösung: A erhält $\frac{1}{4}$ von 100,80 *M.* = 25,20 *M.*
B erhält $\frac{1}{3}$ von 100,80 *M.* = 33,60 *M.*
C erhält den Rest d. i. 100,80 *M.* — (25,20 + 33,60) *M.* =
100,80 *M.* — 58,80 *M.* = 42 *M.*

Probe: Wenn die Rechnung richtig ist, muß die Summe der Anteile gleich sein der Teilungssumme, folglich

Anteil des A + Anteil des B + Anteil des C = Teilungssumme
25,20 *M.* + 33,60 *M.* + 42 *M.* = 100,80 *M.*

Zu einem Kompagniehandel gaben A 1470 *M.*, B 735 österr. fl. und C 490 Th; sie erzielten einen Gewinn von 2520 frcs. Wie viel Mark d. R.=W. erhält ein jeder?

Auflösung: A gab 1470 *M.*
B gab 735 fl. öst. W. = 1470 *M.*
C gab 490 Thl = 1470 *M.*

Da von den 3 Händlern jeder gleich viel gab, so erhält auch jeder den gleichen Anteil am Gewinn, folglich den dritten Teil des erzielten Gewinnes, d. i. 2520 frs : 3 = 840 frs.

Wenn man die eine oder andere Verhältniszahl mit einem gewissen Summanden oder Subtrahenden vereinigt, so hat man zunächst von der zu teilenden Zahl die Summe sämmtlicher Summanden zu subtrahieren und zu dieser Differenz die Summe sämmtlicher Subtrahenden zu addieren.

Die Summe von 6400 Mark R. W. soll unter 4 Personen so verteilt werden, daß B 300 Mark mehr als die Hälfte des Anteiles des A erhalte, C $1\frac{1}{2}$ mal so viel als A weniger 500 Mark und D $\frac{3}{4}$ mal so viel als A und 600 Mark. Wie groß ist der Anteil eines jeden?

Auflösung.

$$\begin{aligned} &6400 - 300 - 600 + 500 \\ = \ &6400 - 900 + 500 \\ = \ &6000 \end{aligned}$$

Die Verhältniszahlen sind: 1, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ demnach

$$\frac{6000}{1 + \frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{6000}{\frac{15}{4}} = \frac{6000 \cdot 4}{15} = 1600.$$

A	erhält also		1600 Mark
B	„	$\frac{1}{2} \cdot 1600 + 300 =$	1100 Mark
C	„	$\frac{3}{2} \cdot 1600 - 500 =$	1900 Mark
D	„	$\frac{3}{4} \cdot 1600 + 600 =$	1800 Mark
Probe:		Summa	6400 Mark

In manchen Aufgaben ergeben sich die Verhältniszahlen als die Produkte oder Quotienten anderer Zahlen, die als Ausdrücke verschiedener Bestimmungen dienen. Z. B.

Vier Metzger pachten eine Wiese um 78 Francs.

A	läßt 20	Stück	Vieh 45	Tage	weiden,	
B	„ 24	„	„ 40	„	„	
C	„ 36	„	„ 40	„	„	und
D	„ 90	„	„ 18	„	„	

Was hat jeder zu dem Pachtzins beizutragen?

1. Lösung.

		Die Verhältniszahlen dividiert durch den gemeinschaftlichen Faktor 180:
A	$20 \cdot 45 = 900$	5
B	$24 \cdot 30 = 720$	4
C	$36 \cdot 40 = 1440$	8
D	$90 \cdot 18 = 1620$	9
		26

A) $\frac{78 \cdot 5}{26} = 15$ Francs.

B) $\frac{78 \cdot 4}{26} = 12$ Francs.

C) $\frac{48 \cdot 8}{26} = 24$ Francs.

D) $\frac{78 \cdot 9}{26} = 27$ Francs.

Probe: Summa 78 Francs.

2. Lösung nach Proportion
(bleibt dem Unterrichte vorbehalten).

Unter die 3 ersten Schüler einer Klasse sollen am Ende des Schuljahres 70 Francs so verteilt werden, daß der zweite halb so viel als der erste und der dritte halb soviel als der zweite erhält. Wie viel erhält jeder?

1. Lösung.

Verhältniszahlen
für den ersten sei 4
für den zweiten $\frac{4}{2} = 2$
für den dritten $\frac{2}{2} = 1$

folglich Anteil des ersten $= \frac{70}{4+2+1} \cdot 4 = \frac{70}{7} \cdot 4 = 40.$

Anteil des zweiten $= \frac{70}{4+2+1} \cdot 2 = \frac{70}{7} \cdot 2 = 20.$

Anteil des dritten $= \frac{70}{4+2+1} \cdot 1 = \frac{70}{7} \cdot 1 = 10.$

Probe $40 + 20 + 10 = 70.$

2. Lösung.

der erste erhält x	Durch Multiplikation mit dem allgemeinen Nenner erhält der erste $4x$
der zweite „ $\frac{x}{2}$	der zweite $2x$
der dritte „ $\frac{x}{4}$	der dritte x

$$x + 2x + 4x = 7x.$$
$$7x = 70 \text{ Francs.}$$
$$x = \frac{70}{7} = 10 \text{ Francs.}$$

der dritte erhält 10 Francs
der zweite „ $2 \cdot 10 = 20$ Francs
der erste „ $4 \cdot 10 = 40$ Francs

70 Francs.

3. Art. Durch Proportion.

der erste erhält 1 der zweite „ $\frac{1}{2}$ der dritte „ $\frac{1}{4}$	durch Multiplikation mit dem gemeinschaftlichen Nenner	der erste 4 der zweite 2 der dritte 1

der erste: $7 : 4 = 70 : x$

$$x = \frac{4 . 70}{7} = 40 \text{ Francs.}$$

der zweite: $7 : 2 = 70 : x$

$$x = \frac{2 . 70}{7} = 20 \text{ Francs.}$$

der dritte: $7 : 1 = 70 : x$

$$x = \frac{70 . 1}{7} = 10 \text{ Francs.}$$

Aufgaben.

1) Eine Summe von 954 Mark ist unter 2 Personen zu verteilen im Verhältnis von 7 : 11. Wie viel bekommt jede?

2) Es sollen 14 Francs unter 3 Personen A, B, C so verteilt werden, daß B noch einmal so viel als A und 100 Francs und C dreimal so viel als B und 100 Francs erhält; wie viel erhält jeder?

3) Vier Oekonomen pachteten eine Wiese zur Weide für ihr Vieh um 225 Mark öst. W. Sie trieben nach einander A 20 Stück, B 32 Stück, C 48 Stück und D 40 Stück Rinder darauf. Wie lange trieb jeder sein Vieh auf die Wiese, wenn A 45, B 54, C 81 und D 45 fl. öst. W. zum Pachtschilling beitragen mußte und die ganze Weide 24 Wochen dauerte?

4) Es sollen 8900 Mark unter 3 Personen A, B und C so verteilt werden, daß B dreimal so viel als A weniger 50 Mark, C aber viermal so viel als A weniger 100 Mark erhalte, wie viel bekommt jede Person?

5) 77 Francs sind in folgender Weise unter 3 Brüder zu verteilen. A erhält zweimal so viel als B und $\frac{4}{5}$ von dem Anteil des C. Wie viel erhält jeder?

6) Unter 4 Personen sollen 3869 Francs so verteilt werden, daß Anteil A : B = 4 : 9, B : C = 1 : 8 und C : D = 5 : 12 sich verhält. Wie viel erhält jede Person?

7) Es sollen 206 gleich lange Stücke Tuch gefertigt werden.

Weber A	fertigt	in	3	Tagen	10	Stück
Weber B	"	"	2	"	5	"
Weber C	"	"	4	"	11	"

Wie viel Stücke sind jedem Meister zugewiesen, damit sie gleichzeitig fertig werden können und wie lange brauchen sie zur ganzen Arbeit?

8) Vier Gemeinden bauen auf gemeinsame Kosten eine Brücke, deren Herstellung 15500 fl. öst. W. kostet. Die Beiträge werden so erhoben, daß eine Gemeinde um so weniger bezahlen muß, je entfernter sie von der Brücke gelegen ist. Nun ist die Gemeinde A $\frac{1}{2}$ Stunde, B $\frac{1}{4}$ Stunde, C $\frac{2}{3}$ Stunden, D $\frac{1}{8}$ Stunde entfernt. Wie viel trifft jede Gemeinde?

9) 3020 Mark sind unter 3 Personen in folgender Weise zu verteilen. Der Anteil des A soll zu dem des B wie 5 : 7, der des A : C wie 8 : 11 sich verhalten. Wie viel trifft auf jeden?

10) Jemand hat ein Vermögen von 9000 Mark und trifft die Anordnung, daß nach seinem Tode hievon A $\frac{2}{5}$, B $\frac{3}{8}$ und C den Rest erhält. Wie viel bekommt jeder?

11) Bei einer auf Gegenseitigkeit gegründeten Versicherungsgesellschaft beträgt die Summe aller Versicherungen 2500000 Francs. Die versicherte Summe des A ist 7800 Francs, die des B 9000 Francs. Wie viel hat jeder an dem zu ersetzenden Schaden von 15000 Francs beizutragen?

12) Ein Vermögen von 1440 Mark soll unter vier Gläubiger nach Verhältnis ihrer Forderungen verteilt werden. Die einzelnen Forderungen sind 300, 400, 430, 470 Francs. Wie viel bekommt jeder?

13) Zu einem Geschäfte gibt A 2400 fl. öst. W.; 3 Monate später tritt B mit 6400 fl. öst. W. hinzu und wieder 2 Monate später C mit 16800 fl. öst. W. Nach weiteren 3 Monaten hatten sie einen Gewinn von 25400 öst. W. Wie ist der Gewinn unter sie zu verteilen?

14) Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt A 2400 Francs auf 24 Monate, B läßt sein Kapital 15 Monate verwenden und C trägt 1800 Frcs. bei; bei Verteilung des Gewinnes erhält jeder gleichviel. Wie groß war das Kapital des B und wie lange ließ C sein Kapital verwenden?

15) 926 Mark sollen unter 4 Personen so verteilt werden, daß
A 4 mal so viel als B,
$3\frac{2}{3}$ mal so viel als C,
$1\frac{1}{2}$ mal so viel als D erhält. Was erhält jeder?

16) Bei einem Truppendurchmarsch erhielt eine Gemeinde 200 Mann auf 5 Tage ins Quartier, eine andere 325 Mann auf 2 Tage, eine dritte 250 Mann auf 3 Tage und eine vierte 500 Mann auf 6 Tage. Wie viel hat jede von der 1944 Mark betragenden Gesammtentschädigung zu beanspruchen?

17) A verfertigt in 9 Tagen 120 Stück, B in 8 Tagen 140 St. und C in 6 Tagen 130. Wie viel Stücke sind jedem zuzuteilen, wenn 2835 Stück gleichzeitig fertig werden sollen und wie lange brauchen sie bis zur Vollendung der Arbeit?

18) Zur Aufbringung einer Summe von 3000 Mark vereinigten sich 5 Personen und zwar verhielt sich die Einzahlung des A zu der des B wie 5 : 8, die des B zu der des C wie 2 : 3, die des C zu der des D wie 8 : 15, die des D zu der des E wie 3 : 5. Wie viel hat jeder eingezahlt?

19) Ein Mann hinterläßt 120000 Mark und vermacht davon 1000 Mark der Kirche, 2600 Mark den Armen, 4960 Mk. entfernten Verwandten, das Uebrige erhalten nach Abzug von noch 5695 Mark 60 Pf. die 4 Söhne unter der Bedingung, daß der älteste Sohn von seinem Anteile 4500 Mark an seine Brüder zahle; wie viel erhält jedes Kind?

20) Ein Kaufmann falliert mit 12,000 Mark Schulden; seine einziehbaren Forderungen betragen 16,000 Mark. Nachdem 500 Mark rückständiger Lohn bezahlt wurden, sollte A mit 3400 Mark und B mit 4600 Mark befriedigt werden. Wie viel erhält jeder?

21) Zwei Kaufleute betreiben gemeinschaftlich ein Geschäft. A gibt 500 *M.* auf 9 Monate, B 300 *M.* auf 5 Monate, sie verteilen einen Gewinn von 840 *M.* Wie viel erhält jeder?

22) Der Gewinn eines Compagniegeschäftes hat 2599 *M.* 68 ₰ ergeben. Wie viel betragen die Geschäftsanteile, wenn A 200 *M.* auf 9 Monate, B 600 *M.* auf $1\frac{1}{4}$ Monat und C 400 *M.* auf $1\frac{3}{4}$ Jahr gegeben hat?

23) Ein Geschäftsmann falliert; die ganze Schuld ist 60000 ℳ. Das vorhandene Vermögen nach Abzug der Unkosten nur 14000 ℳ. Er schuldet an A 360 ℳ, an B 480 ℳ. Wie groß ist der Verlust für diese beiden?

24) Drei Kaufleute legen zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte Geld zusammen und zwar A 300 frs, B 90 öst. Gulden, C 120 ℳ. Sie gewinnen damit 9 ℳ mehr als 20% der Einlage. Wie viel hat jeder gewonnen?

25) Ein Kaufmann fallierte. Das vorhandene Vermögen betrug 92000 ℳ, wovon noch zur Bestreitung der Gerichtskosten 5% abgingen. Die Schuld bestand aus 20000 ℳ an A, 36000 ℳ an B, 42800 ℳ an C, 10450 ℳ an D. a) Wie viel bekam jeder der Gläubiger? b) Wie viel verlor jeder? c) Wie groß war der Verlust vom Hundert?

26) Eine Gemeinde, ein Fabrikbesitzer und ein Bergwerksbesitzer müssen zusammen einen Straßenbau, der 264 ℳ kostet ausführen. Die Gemeinde hat $\frac{5}{12}$, der Fabrikbesitzer $\frac{1}{4}$ und der Bergwerksbesitzer $\frac{1}{3}$ beizutragen. Wie viel muß jeder Beitragspflichtige bezahlen?

27) Zu einem Kompagniehandel gab A 210 ℳ, B 70 Reichsthaler und C 105 öst. Gulden. Sie teilen einen Gewinn von 360 frs. Wie viele Mark bekommt jeder?

5. Mischungsrechnungen (Alligationsrechnungen).

Bei jedem Gegenstande kann man unterscheiden:

1) **seine Quantität (Menge)**
2) **seine Qualität (Beschaffenheit).**

Die **Quantität** ist entweder eine Raum- oder Gewichtsgröße. Die **Qualität** erhält ihren Ausdruck durch Angabe des Wertes, Preises eines Gegenstandes, durch Angabe des Feingehaltes, des specifischen Gewichtes ꝛc. ꝛc.

Die Verbindung flüssiger Körper nennt man Mischung, die trockener Körper Gemenge; erfordert die Verbindung von Körpern Feuer, wie bei den Metallen, so heißt das Verbundene Legierung.

Die **häufigsten Legierungen** bestehen aus **Gold und Silber** unter sich oder auch **mit Kupfer.** Unter Feingehalt einer Legierung versteht

man die Bestandteile an feinem Gold oder feinem Silber d. h. Gold oder Silber ohne jeden fremden Zusatz.

Als Gewichtseinheit zur Bezeichnung des Feingehaltes war in Deutschland die kölnische Mark (1 *Mk* = 233,85 g) zu Grunde gelegt. Die Mark Feingold (1 *M.* f. ☉) wurde nun eingeteilt in 24 Karat à 12 Grän und man verstand z. B. unter 20 karätigem Gold eine Legierung, die 20 Karat feines Gold und 4 Karat Zusatz, Silber oder Kupfer, enthielt. 24 Karat Gold ist demnach gleich dem Feingold.

Die Mark Feinsilber wurde in 16 Loth à 18 Grän eingeteilt und man verstand analog dem Obigen unter 12 lötigem Silber eine Legierung, die 12 Lot feines Silber (12 Lot f. ☽) und 4 Lot Zusatz enthielt.

Gegenwärtig bezeichnet man den Feingehalt nach Tausendteilchen. Es bedeutet also Gold vom Feingehalte 0,9 eine Legierung, die 900 g f. ☉ und 100 g Zusatz enthält, in gleicher Weise Silber vom Feingehalte 0,875 eine Legierung, die 875 g f. ☽ und 125 g Zusatz enthält.

Sollen Gegenstände (Ingredienzien) von verschiedenen Preisen und in verschiedenen Mengen (Quantitäten) vermischt werden, so geschieht die Berechnung dieser Gegenstände durch die **sogenannte Alligationsrechnung.**

Regel: Die Summe der Werte der Bestandteile einer Mischung dividiert durch die Anzahl der Bestandteile gibt den Durchschnitts- oder Mittelwert.

Z. B. Man schmilzt 84 Mark Silber vom Feingehalte $15\frac{1}{2}$ und 105 Mark Silber vom Feingehalte 11; welches ist der Feingehalt der Mischung?

84 Mark	$15\frac{1}{2}$ löt. Silber enthalten	$84 \cdot 15\frac{1}{2}$	= 1302	Teile Feingehalt
105 „	11 „ „ „	$105 \cdot 11$	= 1155	„ „
189			2457	

$$\frac{2457}{189} = 13 \text{ lötiges Silber.}$$

Ein Weinwirt mischt 30 Liter Wein à 1 Mark R. W mit 45 Liter à 2 Mark und gießt noch 5 Liter Wasser dazu. Wie hoch kommt der Liter dieser Mischung?

30 Liter	à 1 Mark	= 30 . 1	= 30	Mark.
45 „	à 2 „	= 45 . 2	= 90	„
5 „	à 0 „	= 5 . 0	= 0	„
80 Liter		kosten	120	Mark.

$$1 \text{ Liter} = \frac{120}{80} = 1\frac{40}{80} = 1\frac{1}{2} \text{ Mark.}$$

Bei diesen Alligationsrechnungen ist besonders jene Art hervorzuheben, bei welcher das Verhältnis der Teile nicht unmittelbar angegeben ist, sondern erst gesucht werden muß.

Die Regel hiefür ist folgende:

Der Unterschied zwischen dem mittleren Wert und dem geringeren gibt die Verhältniszahl der besseren Sorte, hingegen der Unterschied zwischen dem besseren Wert und dem mittleren gibt die Verhältniszahl der geringeren Gattung.

1) Jemand hat 2 Sorten Wein, den Liter zu 1 Mark 75 Pf. und zu 1 Mark 10 Pf. Wie viel hat er von jeder Sorte zu nehmen, um 60 Liter zu 1 Mark 15 Pf. zu erhalten?

x Liter à 125 Pf. kosten 125 x Pf.
(60 — x) Liter à 110 Pf. „ (60 — x) . 110 Pf.

Der Betrag der Einnahme, wenn er die beiden Sorten einzeln verkauft, muß gleich sein dem Erlös des gemischten Weines.

$$125\,x + (60 - x) \,.\, 110 = 60 \,.\, 115$$
$$125\,x + 6600 - 110\,x = 6900$$
$$15\,x = 6900 - 6600 = 300$$
$$x = 20 \text{ Liter.}$$

Er nimmt 20 Liter à 125 Pf. = 25 Mark
und 40 Liter à 110 Pf. = 44 Mark

60 Liter à 115 Pf. = 69 Mark

2) Wie viel Wasser muß man zu einem Weine gießen, von welchem der Liter 60 Pf. kostet, um einen Hektoliter zu erhalten, von welchem der Liter 45 Pf. kostet?

x Liter Wasser kosten 0 Pf.
(100 — x) à 60 Pf. = 60 . (100 — x)

$$60 \,.\, (100 - x) = 100 \,.\, 45$$
$$6000 - 60\,x = 4500$$
$$6000 - 4500 = 60\,x$$
$$1500 = 60\,x$$
$$x = \frac{1500}{60} = 25 \text{ Liter Wasser.}$$

75 Liter à 60 Pf.	=	45 Mark
25 Liter à 0 Pf.	=	0 Mark
100 Liter à 45 Pf.	—	45 Mark.

Aufgaben.

1) Man mischt 252 Mark Silber vom Feingehalte $15\frac{1}{2}$ und 315 Mark Silber vom Feingehalt 11. Welches ist der Feingehalt der Mischung?

2) Zu 75 Liter Essig à 30 Centimes gießt man 10 Liter Wasser. Wie teuer kann 1 Liter der Mischung verkauft werden?

3) Man mischt 80 kg à 2 Francs 50 Centimes, 75 kg à 2 Francs 40 Centimes, 60 kg à 2 Francs 25 Centimes und 55 kg à 2 Francs 10 Centimes. Wie viel kostet die Mischung per Kilogramm?

4) Zu 13 Pfund 22 karätigen und 16 Pfund $21\frac{1}{2}$ karätigen Goldes schmilzt man 1 Pfund Kupfer. Wie viel Karat fein wird die Legierung?

5) Man legiert folgende Sorten Silber: 15 Pfund $13\frac{1}{2}$ lötiges, 18 Pfund $14\frac{1}{3}$ lötiges, 22 Pfund $14\frac{1}{2}$ lötiges und 25 Pfund 15 lötiges Silber. Welches wird der Feingehalt der Legierung?

6) Zu einer Legierung werden verwendet: 10 Pfund feines Silber, 25 Pfund à 0,9 f., 30 Pfund à 0,875 f., 35 Pfund à 0,85 f. und $10\frac{5}{8}$ Pfund Kupfer. Wie fein wird die Legierung?

7) Aus 2 Sorten à 57 Francs 80 Centimes und à 32 Francs 80 Centimes per Kilogramm soll eine Mittelsorte à 46 Francs 30 Centimes per Kilogramm hergestellt werden. In welchem Verhältnis hat die Mischung zu erfolgen?

8) In welchem Verhältnisse sind 2 Sorten à 86 fl. 80 Nkr. und à 75 fl. 60 Nkr. per Centner zu mischen, wenn die Mittelsorte 82 fl. 80 Nkr. per Centner kosten soll?

9) Aus 2 Silbersorten à 0,945 f. und à 0,52 f. sind 68 Münzpfund à 0,9 f. herzustellen; wie viele Pfund hat man von jeder Sorte zu nehmen?

10) Wie fein muß das Gold sein, das 18 Pfund Gold à 0,875 f. zugesetzt 28 Pfund à 0,9 fein gibt?

11) Es sollen 100 Kilogramm à 6 Francs aus folgenden Sorten hergestellt werden: à 6 Francs 50 Centimes, 6 Francs 30 Centimes, 5 Francs 90 Centimes, 5 Francs 60 Centimes und 5 Francs 30 Centimes per Kilogramm. Wie kann die Mischung erfolgen?

12) Wie viele Centner à 28, 24, 22, 21 und 20 fl. öst. W. kann man zu einer Mischung von 100 Centner à 25 fl. öst. W. verwenden?

13) Ein Weinhändler mischt 2 Sorten Wein a per Liter 2 Mark und b per Liter 1 Mark 20 Pf. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen, wenn er 2 Hektoliter per Liter 1 Mark 50 Pf. bereiten will?

14) Ein Weinwirt hat dreierlei Wein, den Liter zu 1 fl. 80 Nkr., zu 1 fl. 40 Nkr. und zu 90 Nkr. Er will aus diesen drei Sorten 1 Hektoliter so mischen, daß der Liter der Mischung 1 fl. 20 Nkr. kostet. Wie viel hat er von jeder Sorte zu nehmen?

15) Ein Essigfabrikant hat 4 Sorten Essig, den Liter zu 10 Centimes, 15 Centimes, 20 Centimes und 25 Centimes. Er will 60 Liter à 20 Centimes mischen. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

16) Wenn man unter 1 hl Spiritus à 60 ₰ 50 l Wasser gießt, was kostet dann 1 l der Mischung? Wie groß wäre der Gewinn, wenn man für 1 l 55 ₰ verlangen würde?

17) Ein Bäcker mischt 200 kg Mehl, à 36 ₰, 40 kg geringeres à 20 ₰. Welchen Wert hat 1 kg des Gemisches? Wie viel Brod könnte er backen à 1,25 kg?

18) Aus zwei Sorten einer Ware à 1,2 ℳ und 2,5 ℳ soll eine Mittelsorte à 2 ℳ hergestellt werden. Wie viel hat man von jeder Sorte zu nehmen?

19) Die Mittelsorte kostet 85 ₰, die beiden zu mischenden 1,12 ℳ und 54 ₰. In welchem Verhältnis ist gemischt?

20) Aus 6 Weinsorten à 1,74 ℳ, 1,56 ℳ, 1,50 ℳ, 1,35 ℳ, 1,20 ℳ, 90 ₰ per l sollen 4,05 hl à 1,44 ℳ per l hergestellt werden. Wie viel l muß man von jeder Sorte nehmen?

6. Procentrechnungen.

1. Berechnung von Gewinn und Verlust, Provision, Courtage, Tara 2c.

Unter Procentfuß, beziehungsweise Promillefuß (pro mille d. h. für 1000) versteht man diejenige Zahl, welche angibt, wie viel von der zu grunde gelegten Zahl 100 oder 1000 zu rechnen ist.

Z. B. 5 Procent oder 5 % heißt so viel als: von je 100 sind 5 zu rechnen.

2 Promille, abgekürzt 2 ‰ heißt: von je 1000 sind 2 zu rechnen.

Den Procentfuß (Promillefuß) kann man somit als den Zähler eines Bruches betrachten, dessen Nenner 100, (1000) ist.

Der Wert, von dem gewisse Procente zu berechnen sind, wird gewöhnlich Kapital genannt.

Anm. Eine kurze Erklärung einiger termini technici dürfte hier am Platze sein.

a) Gewinn heißt der Ueberschuß des Erlöses über die aufgewendeten Kosten.

b) Unter Spesen versteht man einen Aufwand, eine Auslage, (Kosten).

Wird die Auslage nicht durch die Einnahme oder den Erlös gedeckt, so entsteht ein Verlust oder Deficit.

Bei Berechnungen des Gewinnes oder Verlustes ist stets die Summe aller Auslagen zu grunde zu legen.

Geschäfte, die einen namhaften Ueberschuß über die Auslage gewähren rentieren sich.

c) Dividende nennt man den bei einem Geschäfte, an welchem sich mehrere beteiligen, erzielten Gewinn, der in der Regel nach der Vermögenseinlage verteilt wird.

d) Tantième heißt der vertragsmäßig festgesetzte Anteil am Geschäftsgewinn oder auch am gesammten Geschäftsertrage.

e) In Procenten werden häufig gewisse Vergütungen berechnet. Z. B.

α) Provision ist die Vergütung, welche der Kommissionär (Auftragnehmer) vom Kommittenten (Auftraggeber) für die Ausführung des Auftrages (Kommission) erhält.

β) Courtage (Mäcklergebühr) ist die dem Mäckler für besorgte Vermittlungsgeschäfte gewährte Vergütung.

γ) Assekuranz- oder Versicherungs-Prämie ist die Vergütung, die der Versicherte, (Assekurierte oder Assekurat) an den Versicherer (Assekurator oder Assekurant) zu entrichten hat. Die den Versicherungsbetrag bezeugende Urkunde heißt Versicherungsschein (Police).

δ) Delcredere ist die Gewährleistung des Kommissionärs für die von ihm auf fremde Rechnung verkauften Waren.

ε) Die Versendung der meisten Waren geschieht bekanntlich in Kisten, Säcken, Körben oder sonst einer Verpackung (Emballage).

Das Gewicht der Ware mit Einschluß der Packhülle nennt man Brutto (Bruttogewicht).

Das Gewicht der Ware allein heißt Netto (Nettogewicht).

Das Gewicht der Verpackung (Emballage) heißt Tara (Taragewicht).

Die Tara wird entweder nach Procenten oder nach Stücken bestimmt.

Im Großhandel bewilligt der Verkäufer dem Käufer einen Gewichtsabzug vom Netto, Gutgewicht genannt, da beim Verkauf in kleinen Partien immer etwas eingewogen wird. Bei manchen Waren wird ein Gewichtsabzug, Refactie genannt, gestattet, um den Käufer für die unverkäuflichen Teile oder Abfälle derselben zu entschädigen, d. h. eine Vergütung für beschädigte Waren zu geben, z. B. bei Häuten, Fellen und anderen Artikeln, die durch Nässe oder Verschimmelung leiden.

Fusti ist eine Vergütung für das Unreine in der Ware z. B. für Stiele, Steine, Blätter und Staub 2c. 2c.

Leccage ist eine Vergütung bei Flüssigkeiten für das, was etwa durch Auslaufen von den Fässern verloren gegangen ist.

Der Kürze wegen bezeichnen wir das Kapital mit c, den Procentfuß mit p und den Procentbetrag mit u.

Anm. p kann auch den Promillefuß bedeuten.

$$u = \frac{c}{100} \cdot p$$

Man findet den Procentbetrag, wenn man den hundertsten Teil des Kapitals mit dem Procentfuß multipliciert. Z. B.

1) Wie viel beträgt die Provision von 6600 Francs zu 3%?

$$u = \frac{6600 \cdot 3}{100} = 198 \text{ Francs.}$$

2) Wie viel beträgt die Assekuranzgebühr von 12000 Mark zu 2‰?

$$u = \frac{1200 \cdot 2}{1000} = 24 \text{ Mark.}$$

3) Man verkauft eine Ware mit 5% Gewinn um $7\frac{1}{2}$ Francs. a) Wie teuer mußte sie gegeben werden, wenn dabei 8% gewonnen werden sollten? b) Wie hoch kommt sie im Ankauf?

a) Bedingungssatz: 105 Frs. mit Gewinn vom 100 Frs. $7\frac{1}{2}$ Frs. Verkauf
Fragesatz: 108 „ „ „ „ 100 „ x „ „

$$105 : 108 = 7\tfrac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{108 \cdot 7\frac{1}{2}}{5} = \frac{108 \cdot 15}{105 \cdot 2} = \frac{54}{7} = 7\tfrac{5}{7} \text{ Francs.}$$

b) $$108 : 7\tfrac{1}{2} = 100 : x$$

$$x = \frac{100 \,.\, 15}{108 \,.\, 2} = \frac{50 \,.\, 5}{36} = \frac{125}{18} = 6\tfrac{17}{18} \text{ Francs.}$$

$$p = \frac{100 \,.\, u}{c}$$

d. h. **man findet den Procentfuß, wenn man den hundertfachen Procentbetrag durch das Kapital dividiert.** Z. B.

1) Eine Concursmasse bezahlt statt 12820 Mark d. R. W. nur 2564 Mark. Wie viel % verlieren die Gläubiger?

$$12820 - 2564 = 10256.$$

$$p = \frac{100 \,.\, 10256}{12820} = 80\,\% \text{ verlieren die Gläubiger.}$$

2) Von einer Ware, die beim Empfang 6564 Zollpfd. wog, sind 120 Zollpfd. eingetrocknet. Wie viel %?

$$p = \frac{100 \,.\, 120}{6546} = \frac{2000}{1091} = 1{,}83\,\%.$$

3) Der Einkauf beträgt 7852 Fr., der Gewinn 863 Fr. 72 Cs. Wie viel %?

$$p = \frac{100 \,.\, 863{,}72}{7852} = \frac{86372}{7852} = 11\,\%.$$

4) Wenn einer Versicherungssumme von 4000 Mark eine Prämie von 5 Mark entspricht, wie viel Promille sind gerechnet?

$$p = \frac{5 \,.\, 1000}{4000} = \frac{5}{4} = 1\tfrac{1}{4}\,‰$$

$$c = \frac{100 \,.\, u}{p}$$

d. h. **das Kapital wird gefunden, indem man den hundertfachen Procentbetrag durch den Procentfuß dividiert.**

Z. B. Der Gewinn zu $8\frac{1}{2}$ % beträgt 64 fl. 9 nkr; wie groß ist der Einkauf?

$$c = \frac{100 \,.\, 64{,}09}{8\frac{1}{2}} = \frac{100 \,.\, 64{,}09 \,.\, 2}{17} = \frac{12818}{17} = 754 \text{ fl. ö. W. Einkauf.}$$

Anm. 1. Nach % oder ‰ werden berechnet:

a) Zins;
b) Rabatt;
c) Versicherungsprämien;
d) Tara;
e) Steigung einer Eisenbahn, einer Straße, das Gefälle eines Flusses;
f) die Zu- und Abnahme einer Bevölkerung;
g) der Einfuhrzoll ausländischer Rohprodukte 2c.

Anm. 2. Alle diese Aufgaben können auch in das Kapitel der Schlußrechnungen oder in das der Proportionen gerechnet werden.

Z. B. Ein Obsthändler erhält für 1 M. 60 Aepfel; wie viel Stück darf er im Detailverkauf für 1 M. geben, um 20 % zu gewinnen?

Auflösung 1. Was der Obsthändler mit einer Mark bezahlt, dafür verlangt er im Verkauf 1 M. 20 ₰ ($\frac{6}{5}$ M.).

Also für $\frac{6}{5}$ M. gibt er 60 Stücke.

„ $\frac{1}{5}$ „ „ „ $\frac{60}{6}$ „ = 10 Stücke.

„ 1 „ „ „ 5 . 10 Stück = 50 Stücke.

Auflösung 2. $1 : 1{,}2 = x : 60$

$x = 60 : 1{,}2$

$= 600 : 12 = 50$ Stücke.

2. Rabattrechnungen.

Unter Rabatt versteht man im allgemeinen den Abzug, welchen der Verkäufer dem Käufer gewährt. Er wird meistens in Procent ausgedrückt. Z. B.

1) Wie viel beträgt der 4 % Rabatt von 1205 Mark?

$$x = \frac{1205 \cdot 4}{100} = \frac{4820}{100} = 48{,}2 \text{ Mark.}$$

2) Wenn man von einer gewissen Summe 4 % Rabatt abzieht, bleiben noch 1156 fl. 80 Nkr. öst. W. übrig; wie groß war jene Summe?

Bedingungssatz: 96 fl. werden ohne Abzug 100 fl. öst.
Fragesatz: 1156,8 fl. werden x fl. öst.

$$96 : 1156{,}8 = 100 : x$$

$$x = \frac{1156{,}8 \cdot 100}{96} = 1205 \text{ fl. öst. W.}$$

3) Wie viel Procent Rabatt rechnet man, wenn 1156,8 fl. öst. W. statt 1205 fl. öst. W. bezahlt wurden?

bei 1205 fl. öst. beträgt der Rabatt 48,2 fl. öst.
bei 100 fl. „ „ „ „ x

$$1205 : 100 = 48{,}2 : x$$

$$x = \frac{48{,}2 \cdot 100}{1205} = 4\,\%.$$

3. Agioberechnung.

Unter dem Agio (Aufgeld) versteht man im allgemeinen die Differenz zwischen dem bestimmten festen Preise einer Geldsorte und dem veränderlichen Marktpreise derselben.

Wenn nämlich Papiergeld in Silber, grobe Scheidemünze in größeres Silbergeld umgewechselt wird, so kommt es im gewöhnlichen Leben vor, daß dafür **ein oder mehrere Procente Entschädigung** gezahlt werden und **diese Mehrbezahlung** heißt **Agio.**

Der Ausdruck „Al pari“ kommt meist bei Obligationen und Wechseln vor.

Wird **ein solches Papier** um den **vollen Nennwert** bezahlt, so sagt man, es steht **„al pari“**, wenn nicht, so steht es entweder **„über pari“ oder „unter pari“.**

Z. B. Jemand wechselt 80 fl. öst. Papiergeld in Silber. Der Banquier fordert $\frac{1}{2}\,\%$ Agio. Wie viel beträgt dieses Agio und was muß der Wechselnde für 80 fl. öst. W. Silber bezahlen?

Bei 100 fl. $\frac{1}{2}$ fl. Agio

$$80 \text{ fl. } \frac{80}{200} = \frac{2}{5} \text{ fl. öst. W.} = 40 \text{ Nkr.}$$

80 fl. 40 Nkr. öst. Papier müssen für 80 fl. öst. Silber bezahlt werden.

Aufgaben.

1) Wie viel beträgt die Provision von 12600 Mark zu $2\frac{1}{2}\,\%$?
2) Wie viel beträgt die Assekuranzprämie von 25000 fl. öst. W. zu $1\frac{1}{2}\,\%$?
3) Eine Ware wird mit $10\,\%$ Gewinn um 660 Mark verkauft, a) wie teuer müßte sie gegeben werden, wenn dabei $15\,\%$ gewonnen werden sollten; b) wie hoch kommt sie im Ankauf?
4) Eine Concursmasse bezahlte statt 12816 Francs nur 8544 Francs. Wie viel % gingen den Gläubigern verloren und wie viel hat der Schuldner demnach bezahlt?
5) Der Einkauf beträgt 15704 Francs, der Gewinn 1727 Francs 44 Centimes, wie viel Procent beträgt der Gewinn?
6) Wenn einer Versicherungssumme von 12000 Mark eine Prämie von 15 Mark entspricht, wie viel Promille sind gerechnet?
7) Der Gewinn von $25\frac{1}{2}\,\%$ beträgt 192 fl. 27 Nkr. öst. W.; wie groß ist der Einkauf?

8) Verkaufspreis 25516 Francs. Gewinn $6\frac{1}{2}\,\%$; wie groß ist der Einkaufspreis?

9) Der Einkaufspreis einer Ware beträgt 825 Mark, der Gewinn $6\,\%$; wie groß ist dieser?

10) Bei einer Forderung von 9450 Francs gehen $60\,\%$ verloren, wie viel beträgt der Verlust?

11) Wie groß ist die Versicherungssumme, wenn bei $2\frac{1}{2}\,‰$ die Prämie 10 Mark beträgt?

12) Eine Aktiengesellschaft verteilt eine Dividende von $\frac{3}{4}\,\%$, so daß auf jede Aktie 6 Mark treffen; wie groß ist die Actie?

13) Wie viel beträgt der $4\,\%$ Rabatt von 6500 fl. öst. W.?

14) Wenn man von einer gewissen Summe $4\,\%$ Rabatt abzieht, bleiben noch 2313 fl. 60 Nkr. öst. W. übrig; wie groß war jene Summe?

15) Wie viel Procent Rabatt rechnet man, wenn 3470,4 fl. öst. W. statt 3615 fl. öst. W. bezahlt wurden?

16) Von 2500 Mark werden $6\,\%$ Rabatt hinweggenommen; wie viel beträgt derselbe?

17) Jemand kaufte 12 Exemplare eines Buches und erhielt ein Freiexemplar; wie viel Rabatt wurde ihm bewilligt?

18) Jemand wechselt 6000 fl. öst. Papiergeld in Silber. Der Banquier fordert $\frac{1}{2}\,\%$ Agio. Wie viel beträgt das Agio und was muß der Wechselnde für 6000 fl. öst. W. Silber bezahlen?

19) Auf welchen Betrag erhöhen sich 2487 $ 40 cs bei Berechnung von $4\frac{1}{2}\,\%$ Kommission?

20) Wie viel erhält ein Gläubiger für seine Forderung von 3794 fl. 80 nkr, wenn die Dividende $43\frac{1}{4}\,\%$ beträgt?

21) Bei einem Verkaufe von 716 £ 11 s 6 d betragen die Spesen $5\frac{1}{2}\frac{3}{4}\,\%$. Welches ist der Reinertrag?

22) Wie viel beträgt die Courtage von 12650 frs à $\frac{3}{8}\,‰$?

23) Wie viel beträgt der Zoll auf 8356 ℳ 50 ₰ à $6\,\%$?

24) Wie viel beträgt die Tara vom Brutto 9216 ℔ à $16\,\%$?

25) Wie viel beträgt die Dividende in einer Concursmasse für eine Forderung von 3607 fl 8 nkr à $64\frac{1}{2}\,\%$?

26) Wie viel betragen in Wien 1235 fl in Silber wenn das Silberagio $12\frac{3}{5}\,\%$ ist?

27) Eine Ware wiegt Brutto 18555 ℔, Tara $14\,\%$. Wie groß ist das Nettogewicht?

28) Eine Assekuranzgesellschaft berechnet für Prämie à $1\frac{1}{2}$ % 71 *M.* 25 *₰*. Welche Summe ist versichert?

29) Auf wie viel lautet eine Factura, wenn die Provision à $3\frac{1}{2}$ % 252 fl 53 nkr beträgt?

30) Der Einkauf einer Ware beträgt 464 fl 80 nkr, der Verlust beim Verkauf 21 %. Wie groß ist der Verlust?

31) Welches ist das Nettogewicht, wenn vom Brutto 6740 ℔ 14 % Tara abzuziehen sind?

32) Ein Geschäftsmann findet beim Abschluße seiner Bücher, daß sich sein Kapital von 65000 *M.* auf 77187 *M.* 50 *₰* vermehrt hat. Wie viel % betrug dieselbe?

33) Wie viel % beträgt der Gewinn, wenn an 1840 *M.* 156 *M.* 40 *₰* gewonnen wurden?

34) Jemand kauft ein Staatspapier, das ihm jährlich 3 *M.* Zinsen trägt für 72 *M.* Zu wie viel % verzinst sich das darin angelegte Kapital?

35) Ein Holzhändler kaufte 1000 cbm Holz à $5\frac{1}{2}$ *M.* und verkaufte per cbm für 6,25 *M.* a) Wie viel gewann er und b) wie viel %?

36) Jemand kaufte für 125,4 *M.* Ware und verdiente beim Verkauf 20 %. a) Wie viel betrug der Verkaufswert; b) wie viel der Gewinn?

37) Ein Getreidehändler kaufte für 6850 *M.* Getreide und setzte es für 7021 *M.* 25 *₰* ab. a) Wie viel gewann er; b) wie viel %?

38) Ein Bierbrauer gab im Jahre auf Gerste, Hopfen 2c. 9625 *M.* 75 *₰* aus. a) Wie viel nahm er ein, wenn er 90 % verdiente; b) wie viel Gewinn hatte er?

39) Ein Viehhändler handelte 80 Stück Ochsen für 19200 *M.* ein und verkaufte sie für 27200 *M.* a) Wie viel verdiente er; b) wie viel %?

40) Beim Empfang wog eine Ware 2168 kg sie verlor auf dem Lager durch Eintrocknen $\frac{11}{16}$ %. Wie viel wiegt die Ware?

7. Zinsrechnungen.

Eine Summe Geldes, welche man irgendwie verwendet, um damit einen Gewinn zu erhalten, heißt **Kapital**.

Wenn jemand einem anderen Geld, Wohnungsräumlichkeiten oder Grundstücke zur Benützung überläßt, so wird er für die Benützung seines Eigentums eine gewisse Entschädigung beanspruchen, welche man im allgemeinen **Zinsen oder Interessen** nennt. Man spricht daher von **Kapital-, Miet-** und **Pachtzins**.

Derjenige, welcher das **Geld** (Kapital) **ausleiht**, heißt **Gläubiger** oder **Creditor, derjenige**, der **es zu leihen nimmt**, heißt **Schuldner** oder **Debitor**.

Die Zahl, welche angibt, wie viel der Schuldner dem Gläubiger **für oder von hundert Kapital** als **Vergütung** zu zahlen hat, heißt **Procentzahl oder Zinsfuß**. Der Zinsfuß ist sehr verschieden. Sichere vom Staate garantierte Institute gewähren einen niedereren Zinsfuß als Privatunternehmer. Es zahlt z. B. die Bank für die bei ihr deponierten Gelder nur 2 bis $2\frac{1}{2}$ %, Sparkassen in der Regel 3 bis 4 %, der Staat für seine Papiere $3\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ %.

Ist jemand gezwungen, Geld aufzunehmen, so muß er 4, 5 auch 6 % zahlen, ein höherer Zinsfuß kommt nur in seltenen Fällen vor. Zur größeren Sicherheit seines Geldes läßt sich in der Regel der Gläubiger das Anwesen oder ein Grundstück des Schuldners gerichtlich als Unterpfand verschreiben. **Ein solcher Schuldschein** heißt **Hypothek** und erhält dadurch der betreffende Gläubiger den Vorrang oder das Vorrecht vor den sogenannten **Currentgläubigern** auf Befriedigung seiner Ansprüche.

Man pflegt in der Zinsrechnung, wenn es nicht ausdrücklich anders gefordert wird, in den meisten Staaten das Jahr zu 12 Monaten, den Monat zu 30 Tagen und das Jahr zu 360 Tagen anzunehmen. Nur in England, den englischen Kolonien und in Amerika wird im kaufmännischen Verkehr der Zinsfuß auf 365 Tage berechnet und bringt man deshalb bei jedem Monat die Anzahl der Tage in Berechnung, die der betreffende Monat wirklich hat.

Die Zinsrechnung ermittelt:

1) **Die Zinsen,**
2) **den Zinsfuß,**
3) **das Kapital,**
4) **die Zeit der Verzinsung.**

1) Die Zinsen werden gesucht.

Wie viel Zinsen trägt ein Kapital von 4240 *M.* in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu $4\frac{1}{2}$ %.

1. Lösung nach Proportion.

Bedingungssatz: 100 *M.* Kapital tragen in 1 Jahre $4\frac{1}{2}$ *M.* Zinsen
Fragesatz: 4240 „ „ „ „ $2\frac{1}{2}$ „ x „ „

$$\left.\begin{array}{r} 100 : 4240 \\ 1 : 2\frac{1}{2} \end{array}\right\} = 4\frac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{4240 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2}}{100} = \frac{4240 \cdot 5 \cdot 9}{100 \cdot 2 \cdot 2} = 477 \text{ M. Zins.}$$

2. Lösung durch Schluß.

100 *M.* Kapital tragen in 1 Jahre $4\frac{1}{2}$ *M.* Zinsen

1 *M.* Kapital trägt in 1 Jahre $\frac{4\frac{1}{2}}{100}$ *M.* Zinsen

4240 *M.* Kapital tragen in 1 Jahre $\frac{4\frac{1}{2} \cdot 4240}{100}$ *M.* Zinsen

4240 *M.* Kapital tragen in $2\frac{1}{2}$ Jahren $\frac{4\frac{1}{2} \cdot 4240 \cdot 2\frac{1}{2}}{100}$ *M.* Zinsen

$$\frac{4\frac{1}{2} \cdot 4240 \cdot 2\frac{1}{2}}{100} = \frac{9 \cdot 4240 \cdot 5}{2 \cdot 100 \cdot 2} = 477 \text{ M. Zinsen.}$$

2) Der Zinsfuß wird gesucht.

Zu wie viel % oder zu welchem Zinsfuß ist ein Kapital von 4240 frs ausgeliehen, wenn dasselbe in $2\frac{1}{2}$ Jahren 477 frs Zinsen tragen soll?

1. Lösung nach Proportion.

Bedingungssatz: 4240 frs Kapital tragen in $2\frac{1}{2}$ Jahren 477 frs Zins.
Fragesatz: 100 „ „ „ „ 1 Jahr x „ „

$$\left.\begin{array}{l} 4240 : 100 \\ 2\frac{1}{2} \;\; : 1 \end{array}\right\} = 477 : x$$

$$x = \frac{100 \cdot 1 \cdot 477}{4240 \cdot 2\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}\ \%.$$

2. Lösung durch Schluß.

4240 frs Kapital tragen in $2\frac{1}{2}$ Jahren 477 frs Zinsen

4240 „ „ „ „ 1 Jahr $\frac{477}{2\frac{1}{2}}$ „ „

1 „ „ trägt „ 1 „ $\frac{477}{2\frac{1}{2} \cdot 4240}$ „ „

100 „ „ tragen „ 1 „ $\frac{477 \cdot 100}{2\frac{1}{2} \cdot 4240}$ „ „

$$\frac{477 \cdot 100}{2\frac{1}{2} \cdot 4240} = 4\tfrac{1}{2}\,\%.$$

3) Das Kapital wird gesucht.

Welches Kapital trägt in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu $4\frac{1}{2}\,\%$ 477 fl. öst. W. Zins?

1. Lösung nach Proportion.

Bedingungssatz: $4\frac{1}{2}$ fl. ö. W. tragen in 1 Jahr 100 fl. ö. W. Kapital.
Fragesatz: 477 „ „ „ „ „ $2\frac{1}{2}$ „ x „ „ „ „

$$\left.\begin{matrix} 4\frac{1}{2} : 477 \\ 2\frac{1}{2} : 1 \end{matrix}\right\} = 100 : x$$

$$x = \frac{477 \cdot 1 \cdot 100}{4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}} = \frac{\overset{53}{\cancel{477}} \cdot \overset{20}{\cancel{100}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{9}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = 4240 \text{ fl. ö. W.}$$

2. Lösung durch Schluß.

$4\frac{1}{2}$ fl. ö. W. Zinsen tragen in 1 Jahr 100 fl. ö. W. Kapital

1 „ „ „ „ trägt „ 1 „ $\frac{100}{4\frac{1}{2}}$ „ „ „ „

477 „ „ „ „ tragen „ 1 „ $\frac{100 \cdot 477}{4\frac{1}{2}}$ „ „ „ „

477 „ „ „ „ „ „ $2\frac{1}{2}$ „ $\frac{100 \cdot 477}{4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}}$ „ „ „ „

$$\frac{100 \cdot 477}{4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}} = \frac{\overset{20}{\cancel{100}} \cdot \overset{53}{\cancel{477}} \cdot 2 \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{9}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = 4240 \text{ fl. ö. W. Kapital.}$$

4. Die Zeit wird gesucht.

Wie lange muß ein Kapital von 4240 *M.* ausgeliehen sein, um zu $4\frac{1}{2}\,\%$ 477 *M.* Zinsen zu tragen?

1. Lösung nach Proportion.

Bedingungssatz: 100 M. Kapital tragen $4\frac{1}{2}$ M. Zins in 1 Jahr.
Fragesatz: 4240 M. „ „ 477 „ „ „ x „ .

$$\left.\begin{matrix} 4240 : 100 \\ 4\frac{1}{2} : 477 \end{matrix}\right\} = 1 : x$$

$$x = \frac{100 \cdot 477 \cdot 1}{4240 \cdot 4\frac{1}{2}} = \frac{\overset{5}{\cancel{100}} \cdot \overset{\overset{1}{\cancel{53}}}{\cancel{477}} \cdot 1 \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{\underset{\underset{2}{\cancel{106}}}{\cancel{2120}}}{\cancel{4240}} \cdot \underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \text{ Jahr.}$$

2. Lösung durch Schluß.

100 M.	Kapital	tragen	$4\frac{1}{2}$ M.	Zinsen	in	1	Jahr
1 „	„	trägt	$4\frac{1}{2}$ „	„	„	$1 \cdot 100$	„
4240 „	„	tragen	$4\frac{1}{2}$ „	„	„	$\frac{1 \cdot 100}{4240}$	„
4240 „	„	„	1 „	„	„	$\frac{1 \cdot 100}{4240 \cdot 4\frac{1}{2}}$	„
4240 „	„	„	477 „	„	„	$\frac{1 \cdot 100 \cdot 477}{4240 \cdot 4\frac{1}{2}}$	„

$$\frac{100 \cdot 477}{4240 \cdot 4\frac{1}{2}} = \frac{\overset{5}{\cancel{100}} \cdot \overset{\overset{1}{\cancel{53}}}{\cancel{477}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{\underset{\underset{2}{\cancel{106}}}{\cancel{2120}}}{\cancel{4240}} \cdot \underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

Bei den Aufgaben der Zinsrechnung kann auch der Fall vorkommen, daß **Kapital und Zins in einer Summe vereinigt** angegeben sind.

Ein gewisses Kapital wurde zu 4 % ausgeliehen, nach $2\frac{1}{2}$ Jahren erhielt man an Kapital und Zinsen zusammen die Summe von 616 Mark. Wie groß ist das Kapital und welchen Zins trug dasselbe?

Bedingungssatz: 110 Mark in $2\frac{1}{2}$ Jahren angewachsen von 100 Mark
Fragesatz: 616 „ „ $2\frac{1}{2}$ „ „ „ x „

$$110 : 616 = 100 : x$$

$$x = \frac{616 \cdot 100}{110} = 560 \text{ Mark Kapital.}$$

$$\text{Zinsen} = 616 - 560 = 56 \text{ Mark Zinsen.}$$

Die Zinsen können auch direkt gefunden werden durch die Proportion.

$$110 : 616 = 10 : x$$

$$x = \frac{616 \,.\, 10}{110} = 56 \text{ Mark.}$$

1. Zinseszinsenrechnung.

Wenn die Zinsen eines Kapitals zum Kapital geschlagen und nun gleich diesem wieder verzinst werden, erhält man **zusammengesetzte Zinsen oder Zinseszinsen.**

Z. B. Wie hoch werden 5000 Francs Kapital in 4 Jahren bei ganzjährigen Zinzeszinsen à 5 % anwachsen und wie viel betragen die dabei entstandenen Zinseszinsen?

1. Jahr. $\frac{5000 \,.\, 5}{100} = 250$ Frcs. Zinsen.

2. Jahr. $\frac{5250 \,.\, 5}{100} = \frac{2625}{10} = 262{,}5$ Frcs. Zinsen.

3. Jahr. $\frac{5512{,}5 \,.\, 5}{100} = 275{,}625$ Frs. Zinsen.

4. Jahr. $\frac{5788{,}125 \,.\, 5}{100} = 289{,}40625$ Frcs. Zinsen.

a) das Kapital wächst an auf

5788,125 Francs.

b) die dabei entstandenen Zinseszinsen betragen

$250 + 262{,}5 + 275{,}625 + 289{,}40625 = 1077{,}53125$ Frcs.

um $1077{,}53125 - 4 \,.\, 250$

= 77 Francs 53,125 Centimes mehr als die einfachen Zinsen.

2. Berechnung des mittleren Zinsfußes mehrerer Kapitalien.

1) Welches ist der mittlere Zinsfuß von vier gleichen Kapitalien, die zu $4\frac{1}{2}$, 4, $3\frac{1}{2}$ und 3 % ausgeliehen sind?

Mittlerer Zinsfuß $= \frac{4\frac{1}{2} + 4 + 3\frac{1}{2} + 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ %.

2) 2000 Mark sind ausgeliehen zu 3 %, 4000 Mark zu 4 % und 1500 Mark zu 6 % Welches ist der mittlere Zinsfuß?

$$\begin{array}{rcr} 2000 \,.\, 3 & = & 6000 \\ 4000 \,.\, 4 & = & 16000 \\ 1500 \,.\, 6 & = & 9000 \\ \hline 7500 & = & 31000 \end{array}$$

$$\frac{31000}{7500} = \frac{62}{15} = 4\tfrac{2}{15}\ \% \text{ mittlerer Zinsfuß.}$$

3) Von drei gleichen Kapitalien ist a) auf 6 Monat zu 4%, b) auf 5 Monat zu 3% und c) $\frac{1}{4}$ Jahr zu 5% ausgeliehen, welches ist der mittlere Zinsfuß dieser Kapitalien?

$$\begin{array}{rcl} 6 \cdot 4 & = & 24 \\ 5 \cdot 3 & = & 15 \\ 3 \cdot 5 & = & 15 \\ \hline 14 & = & 54 \end{array}$$

$\frac{54}{14} = 3\frac{6}{7}$% mittlerer Zinsfuß.

Aufgaben.

1) Wie viel Zinsen tragen 5840 fl öst. W. Kapital in 7 Jahren zu 5%?
2) Wie viel Zinsen tragen 2100 Francs Kapital zu $3\frac{1}{2}$% in 8 Monaten?
3) Jemand verwendet ein Kapital von 11151 Mark zum Ankauf von 5 procentigen Staatspapieren, deren Cours $103\frac{1}{4}$ ist. Wie viel nimmt er hievon jährlich an Zinsen ein?
4) 6000 fl. öst. W. Kapital tragen in 3 Jahren 900 fl. öst. W. Zinsen. Wie viel Zinsen tragen 560 fl. öst. W. Kapital in 2 Jahren?
5) Wie viele Mark Zinsen tragen 1000 Mark zu 6% in 3 Monaten?
6) Wie viele Mark Zinsen tragen 3000 Francs Kapital zu 6% in 18 Tagen?
7) Welches ist der Zins von 33000 Mark zu 5% in 96 Tagen?
8) Für welches Kapital erhält man zu $3\frac{3}{4}$% nach 11 Monaten $280\frac{1}{2}$ Mark Zinsen?
9) Wenn 4300 Mark Kapital in 3 Jahren 516 Mark Zinsen tragen, welchen Zins tragen 5700 Mark Kapital in 2 Jahren?
10) Wie groß muß ein Kapital sein, um in 4 Jahren zu $3\frac{1}{3}$% 1040 Francs Zinsen zu tragen?
11) Welches Kapital ist nötig, wenn man zu 5% dieselben Zinsen erhalten will, die ein Kapital von 6400 fl. ö. W. zu 4% abwirft?
12) Welches Kapital trägt zu 5% in 3 Jahren 4065 Mark Zins?
13) Jemand verwendet 11765 Francs Kapital zum Ankauf von $3\frac{1}{2}$% Staatspapieren und nimmt jährlich an Zinsen 455 Frs. ein. Zu welchem Cours hat er fragliche Staatspapiere gekauft?

14) Welches Kapital trägt zu $4\frac{1}{2}$ % in $4\frac{1}{12}$ Monaten ebensoviel Zins als ein Kapital von 8400 Mark zu $5\frac{1}{4}$ % in 4 Jahren?

15) Wie viel betragen an Kapital und Zinsen 6500 Francs zu $5\frac{1}{2}$ % nach 4 Jahren?

16) Für eine gewisse Summe werden nach $2\frac{1}{3}$ Jahren mit Einschluß der Zinsen zu $5\frac{1}{2}$ % 1354 Mark zurückbezahlt. Wie groß war das ursprüngliche Kapital?

17) Nach 1 Jahre erhielt man an Kapital und Zinsen für eine zu 5 % ausgeliehene Summe 378 Mark zurück. Wie viel betragen Kapital und Zinsen gesondert?

18) Zu wie viel % tragen 2607 Mark Kapital in 8 Monaten 86,9 Mark Zinsen?

19) Zu wie viel % tragen 12900 fl. öst. W. in 145 Tagen $311\frac{3}{4}$ Mark Zinsen? (1 Jahr = 360 Tage.)

20) Zu wie viel % tragen 4700 Mark Kapital in 3 Jahren 564 Mark Zinsen?

21) Zu wie viel % tragen 8900 Mark in 3 Monaten ebensoviele Zinsen als 2403 Mark zu 5 % in 10 Monaten?

22) Zu wie viel % ist ein Kapital von 2000 Francs ausgeliehen, wenn dasselbe in $3\frac{1}{2}$ Jahren 350 Francs Zinsen trägt?

23) Zu welchem Zinsfuß muß ein Kapital ausgeliehen werden, welches in 5 Jahren ebensoviel Zinsen tragen soll, als es zu 4 % in $4\frac{3}{4}$ Jahren bringt?

24) Die halbjährigen Zinsen einer Staatsschuld von $6\frac{1}{2}$ Millionen Francs betragen 146250 Francs. Wie groß ist der Zinsfuß?

25) Jemand leiht 75 Mark her und läßt sich vom Schuldner einen Schuldschein von 100 Mark, zahlbar in 4 Monaten ausstellen. Wie viel % trägt das Kapital?

26) Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 2000 fl. öst. W. durch einfache Zinsen zu 5 % auf 3500 fl. öst. W. angewachsen ist?

27) In welcher Zeit tragen 5175 Mark zu $4\frac{1}{2}$ % ebensoviele Zinsen als 4347 Mark zu $3\frac{3}{4}$ % in 10 Monaten?

28) In wie viel Tagen tragen 1312,5 Francs Kapital zu 5 % 35 Francs Zinsen?

29) Wie lange müssen 1960 Mark Kapital ausstehen, um zu 3 % dieselben Zinsen zu bringen, welche 1260 Mark Kapital zu $3\frac{1}{2}$ % in $9\frac{1}{3}$ Monaten geben?

30) In wie viel Jahren wird ein Kapital von 1000 Francs zu $5\,\%$ um $\frac{1}{4}$ größer geworden sein?

31) In wie viel Monaten erwachsen 9200 Mark Kapital mit Einschluß der Zinsen zu $4\frac{1}{2}\,\%$ auf 9338 Mark?

32) Auf welche Summen wachsen 5000 Francs Kapital zu $4\frac{1}{2}\,\%$ mit Zinseszinsen nach 5 Jahren an?

33) Welches Kapital beträgt zu $5\,\%$ Zinseszinsen nach 6 Jahren 10000 Francs?

34) Wie hoch werden 10000 Mark Kapital in 10 Jahren bei ganzjährigen Zinseszinsen à $5\,\%$ anwachsen, und wie viel betragen die dabei enstehenden Zinseszinsen?

35) Welches ist der mittlere Zinsfuß von 5 gleichen Kapitalien, die zu 5, $5\frac{1}{2}$, 4, 6 und $4\frac{1}{2}\,\%$ ausgeliehen sind?

36) 500 Mark sind ausgeliehen zu $5\,\%$, 300 Mark zu $4\,\%$ und 600 Mark zu $6\,\%$. Welches ist der mittlere Zinsfuß?

37) Von drei gleichen Kapitalien ist a) auf 6 Monate zu $5\,\%$, b) auf 9 Monate zu $3\,\%$ und c) auf $\frac{1}{3}$ Jahr zu $4\frac{1}{2}\,\%$ ausgeliehen. Welches ist der mittlere Zinsfuß dieser Kapitalien?

38) Drei Schuldner bringen ihren Gläubigern die sechsmonatlichen Zinsen A $135\frac{1}{2}$ Mark zu $5\,\%$, B 216,1 Mark zu $4\,\%$ und C 90 Mark zu $4\frac{1}{2}\,\%$. Wie viel Kapital hat jeder?

39) Ein Bauerngut hat einen Wert von 63900 Mark und gibt einen Ertrag von 11289 Mark. Zu wie viel $\%$ verzinst es sich?

40) Ein Rentier kaufte 2 Häuser, das erste für 72000 Mark, das zweite für 24500 Mark; jenes bringt jährlich 3960 Mark dieses 1519 Mark Reinertrag. Zu wie viel $\%$ hat er in jedem Falle sein Geld angelegt?

8. Discontrechnungen.

Unter Discont versteht man einen Abzug, der dann stattfindet, wenn ein Kapital vor seiner Verfallzeit zurückbezahlt wird. Besonders kommt der Discont vor, wenn Wechsel vor ihrer Verfallzeit bezahlt werden.

Man unterscheidet den Discont **auf** hundert oder den strengen und den Discont **vom** hundert oder den gewöhnlichen Discont.

Z. B. Welches ist der bare Wert einer nach $3\frac{1}{2}$ Jahren fälligen Forderung von $1028\frac{1}{2}$ fl. öst. W. bei 6 % Disconto und wie groß ist der Disconto selbst?

1. Strenger Disconto (auf 100)

Bedingungssatz: 121 fl. ö. W. Kap. nach $3\frac{1}{2}$ Jahren zahlb. 100 fl. ö. W.
Fragesatz: $1028\frac{1}{2}$ fl. „ „ „ „ $3\frac{1}{2}$ „ „ x

$$121 : 1028\tfrac{1}{2} = 100 : x$$

$$x = \frac{2057 \cdot 100}{2 \cdot 121} = 850 \text{ fl. öst. W.}$$

Die Barzahlung beträgt 850 fl. öst. W. der Disconto $1028\frac{1}{2} - 850 = 178\frac{1}{2}$ fl. öst. W. Dies ist der Zins von 850 fl öst. W. zu 6 % in $3\frac{1}{2}$ Jahren.

Der Discont auf hundert ist also immer der Zins der Barforderung und bei Berechnung desselben wird weder Gläubiger noch Schuldner in Nachteil kommen.

2. Einfacher Disconto (vom 100)

Statt 100 fl. ö. W. Kapital in $3\frac{1}{2}$ Jahren 79 fl. öst. W. Barzahlung
„ $1028\frac{1}{2}$ fl. „ „ „ „ $3\frac{1}{2}$ „ x „ „ „

$$100 : 1028\tfrac{1}{2} = 79 : x$$

$$x = \frac{2057 \cdot 79}{2 \cdot 100} = 812\tfrac{103}{200} \text{ fl. öst. W. ist die Barforderung.}$$

$$1028\tfrac{1}{2} - 812\frac{103}{200} = 215\frac{197}{200} \text{ ist der Disconto.}$$

Diese Summe ist der Zins von $1028\frac{1}{2}$ fl. öst. W. in $3\frac{1}{2}$ Jahren zu 6 %.

Der einfache Discont oder der Discont vom Hundert ist also immer der Zins der Schuldforderung.

Aufgaben.

1) Welches ist der bare Wert einer nach $10\frac{1}{2}$ Jahren fälligen Forderung von $3085\frac{1}{2}$ fl. öst. W. bei 6 % Disconto und wie groß ist der Disconto selbst?
2) Wie groß ist der Disconto vom Hundert zu 4 % von 2850 Mark, welche nach 72 Tagen fällig sind?
3) Jemand löset einen nach $4\frac{1}{2}$ Jahren zahlbaren Schuldschein über 4428 Francs mit 3456 Francs ein. Wie viel % genießt er in der Zwischenzeit von seinem ausgelegten Kapital?

4) Der 4 procentige Disconto auf Hundert von einer nach drei Jahren fälligen Schuld beträgt 27 Mark, wie groß ist letztere?

5) Statt 514 fl. öst. W. zahlte man nach Abzug von 5 % Disconto auf Hundert noch 480 fl. öst. W. Nach wie vielen Monaten war jene Summe fällig?

6) $406\frac{7}{8}$ Mark nach $3\frac{1}{4}$ Jahren zahlbar wurden zu 5 % auf Hundert discontirt. Wie viel betrug die baare Zahlung?

7) 4425 Mark nach $4\frac{1}{2}$ Jahren zahlbar werden zu $6\frac{1}{4}$ % discontirt. Wie groß ist a) die baare Zahlung, b) der Disconto auf Hundert?

8) Wie viele Tage hat ein Wechsel noch zu laufen, welcher nach Abzug von 9 Francs 90 Centimes, d. i. $4\frac{1}{2}$ % vom Hundert mit 2465,1 Francs baar bezahlt wird?

9) Eine Schuld wurde 3 Jahre vor der Verfallzeit mit $6\frac{2}{3}$ % jährlichem Disconto in 100 abgetragen. Wie viel % auf 100 hätte man jährlich discontiren müssen, um denselben Discont zu erhalten?

10) Jemand kauft 1 Monat vor dem Fälligkeitstage eine Wechselforderung von 5750 *M.* mit 5 % Discont. Wie viel zahlte er für dieselbe?

9. Terminrechnungen.

Die Terminrechnung hat die Aufgabe, für mehrere nach verschiedenen Zeiten zahlbare oder fällige unverzinsliche Kapitalien eine mittlere gemeinsame Verfallzeit (einen mittleren gemeinsamen Zahlungstermin) aufzusuchen, zu welcher die ganze Summe dieser Kapitalien auf einmal entrichtet werden kann, ohne daß weder Gläubiger noch Schuldner verkürzt werden.

Z. B. Ein Kaufmann hat in 4 Terminen nachstehende Zahlungen zu leisten:

300 Francs nach 4 Monaten,
400 Francs nach 8 Monaten,
500 Francs nach 1 Jahr und
700 Francs nach 2 Jahren 10 Monaten.

Wann kann die ganze Summe von 1900 Francs auf einmal bezahlt werden, wenn 5 % Zinsen berechnet werden?

Auflösung.

Die Summe der Zinsen, welche sich der Schuldner bis zur Abtragung der ganzen Schuld aus den einzelnen Posten verschaffen kann, muß gleich sein dem Zins aus der Gesammtsumme in der gesuchten Zeit x bei gleichem Zinsfuß, daher

300 Frs.	in 4 Monaten	zahlbar geben denselben Zins wie	1200 Frs.	in 1	M.
400 „	„ 8 „	„ „ „ „ „	3200 „	„ 1	„
500 „	„ 12 „	„ „ „ „ „	6000 „	„ 1	„
700 „	„ 34 „	„ „ „ „ „	23800 „	„ 1	„
			34200	in 1	Mt.

Aus den einzelnen Posten erhält man also gerade so viel Zins, wie aus 34200 Frs. in 1 Monat oder aus 1 Frc. in 34200 Monat oder endlich aus

$$1900 \text{ Frcs. in } \frac{34200}{1900} = 18 \text{ Monat.}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß es nicht auf die Höhe des Zinsfußes ankommt, und daß die Aufgabe auf folgende einfache Art gelöst wird.

$$\begin{array}{r} 300 \,.\, 4 = 1200 \\ 400 \,.\, 8 = 3200 \\ 500 \,.\, 12 = 6000 \\ 700 \,.\, 34 = 23800 \\ \hline 1900 \quad : \quad 34200 = 1 : x \end{array}$$

$$x = \frac{34200 \,.\, 1}{1900} = 18 \text{ Monat.}$$

Aufgaben.

1) Ein Kaufmann hat in 4 Terminen nachstehende Zahlungen zu leisten:

150 Mark nach 2 Monaten,
200 „ „ 4 „ ,
250 „ „ 6 „ und
350 „ „ 1 Jahr 5 Monaten.

Wann kann die ganze Summe von 950 Mark auf einmal bezahlt werden, wenn man 5 % Zinsen berechnet?

2) Welches ist der mittlere Zahlungstermin für 250 Francs nach 4 Monaten fällig, 360 Francs nach 6 Monaten fällig und 620 Francs nach 8 Monaten fällig?

3) Jemand hat 6 Jahre hindurch am Ende jeden Jahres 100 fl. öst. W. abzutragen. Wann könnte er die ganze Schuld von 600 fl. öst. W. auf einmal abtragen?

4) Jemand ist verpflichtet, 4 Jahre hindurch alle 3 Monate 50 fl. öst. W. zu zahlen. Wann könnte er die ganze Schuld auf einmal abtragen?

5) A hat auf 6 Jahre eine Wiese gepachtet, wofür er jährlich 25 Francs bezahlt. Wann könnte er den ganzen Pacht mit 150 Francs auf einmal entrichten, so daß weder er, noch der Eigentümer Schaden leidet?

6) Jemand hat 1200 Mark in vier gleichen Jahresterminen zu entrichten. Wann ist, wenn er die eine Hälfte sogleich bezahlt, die andere Hälfte fällig?

7) A soll an B 4500 Francs nach 2 Jahren zahlen. Beide kommen aber darin überein, daß A 1500 Francs baar und das Uebrige in 3 gleichen Termingeldern à 1000 Francs abtrage. Wie lange muß ein Termin sein?

8) 1000 Francs sind fällig nach 3, 2000 Francs nach 5 und 4000 Francs nach 6 Monaten. Statt dessen werden 5000 Francs baar bezahlt; wann kann der Rest auf einmal erlegt werden?

9) A hat 50 Mark nach 2 Monaten, 100 Mark nach 3 Monaten und 300 Mark nach 4 Monaten zu entrichten, bezahlt aber sogleich 200 Mark. Wann kann er den Rest abtragen?

10) Jemand ist 10000 Francs schuldig. Er verspricht 4000 Francs nach 2 Monaten, 2000 Francs nach 5 Monaten, 1000 Francs nach 6 Monaten und den Rest nach 8 Monaten zu bezahlen. Nach wie viel Monaten kann man fordern, daß die ganze Schuld auf einmal entrichtet werde?

10. Berechnung von Staatspapieren und Aktien.

Die Staatspapiere sind Schuldurkunden, welche der **Staat** seinen **Gläubigern** über ein **empfangenes Darlehen** ausstellt. Dieselben heißen auch **Staatsschuldverschreibungen oder Staatsobligationen (Staatseffekten, Staatsfonds).** Die **Staatsanleihen** werden in den Fällen gemacht, wo außergewöhnliche Staatsbedürfnisse z. B. in Kriegsfällen, bei

großartigen Reformen oder Bauten u. s. w. eintreten, zu deren Befriedigung die gewöhnlichen Staatseinkünfte nicht ausreichen. Die **Verzinsung der Staatspapiere** geschieht meistens nach einem feststehenden Zinsfuße zu bestimmten Zeiten **(halb- oder ganzjährig)**. Die Papiere selbst sind verkäuflich und gehen durch den Börsenhandel von einer Hand in die andere. Wenn dieselben auf den Namen des Gläubigers lauten, so müssen sie bei einem etwaigen Verkaufe im Staatshauptbuche auf den neuen Gläubiger förmlich übertragen werden und nur derjenige, auf dessen Namen das Papier lautet, ist zur Empfangnahme der Zinsen berechtigt. In den meisten Fällen aber sind die Staatspapiere auf den Inhaber (au porteur) ausgestellt und können wie jede andere Ware ohne weiteres verkauft werden. Mit diesen verzinslichen Wertpapieren sind **Zinsscheine oder Coupons** verbunden, welche den Inhaber zur Erhebung der jeweils verfallenden Zinsen berechtigen. Ferners ist dem Couponbogen eine Anweisung auf allenfalls erforderlich werdende Zinsscheine angefügt, welche man **Talon** nennt. Die Art und Weise, wie die Staatsanleihen zu Stande kommen und getilgt werden, sowie die Verbindlichkeiten, welche aus denselben für den Staat gegenüber den Gläubigern hervorgehen, sind sehr verschieden. In der Regel sind die Staatsanleihen von Seiten des Gläubigers **nicht kündbar**, wohl aber steht dem Staate das Recht zu, in **vorausbestimmten Fristen** die geliehenen Summen zu **kündigen** und **zurückzuzahlen.** Die **Tilgung (Amortisation)** der Staatsanleihen geschieht nach einem festen Plane aus der für diesen Zweck besonders eingerichteten und auf verschiedene Weise dotierten Amortisationskasse.

Unverzinsliche Fonds sind solche Anleihen, welche durch Verlosungen, die gewöhnlich in jährlichen Terminen stattfinden, zurückbezahlt werden; man heißt diese Staatspapiere daher auch **Lose oder Prämienscheine,** weil bei dieser die Zinsen durch Prämien oder Gewinnste ersetzt werden.

Wie der Staat Anleihen macht, so können auch mit Erlaubnis desselben von **einzelnen Kreisen, Städten, Gemeinden, größeren Corporationen, von fürstlichen Häusern** (standesherrliche Anleihen) u. s. w. Anleihen abgeschlossen werden, deren Schuldscheine dann ebenso wie die Staatspapiere Gegenstand der Kapitalanlage und des Handels zu sein pflegen.

In unserer Zeit kommt es nicht selten vor, daß sich Gesellschaften zu industriellen Zwecken, z. B. zur Anlage einer Eisenbahn oder zur

Errichtung und zum Betriebe einer Brauerei, einer Fabrik 2c. bilden, und die Teilnehmer ohne weitere persönliche Haftung bestimmte Kapitalseinlagen leisten.

Das auf solche Weise gebildete Gesellschaftsvermögen wird in unteilbare **Anteile (Aktien oder Aktienteile)** zerlegt, welche dem **Teilnehmer oder Aktionär** einen verhältnismäßigen Anteil an dem Gesellschaftsvermögen gewähren. Eine solche Gesellschaft nennt man **Aktien-Gesellschaft.**

Schuldverschreibungen über Darlehen, welche Kreditanstalten zum Zwecke des Betriebes des Hypothekengeschäftes, das ist zum Zwecke der Gewährung von Darlehen an Grundbesitzer gegen Liegenschaftsverpfändung aufnehmen, nennt man **Pfandbriefe.**

Der Wert, auf welchen derartige Wertpapiere lauten, wird **Nominal- oder Nennwert** genannt. Die Wertpapiere bilden einen Gegenstand des Handels, und jene Personen, die sich mit ihrem Umsatze, das ist mit dem An- und Verkauf derselben befassen, heißen **Wechsler oder Banquiers.** Der im Handel sich feststellende Wert dagegen heißt **Cours (Kurs).** Eine Seltenheit ist es, daß der Courswert (effektiver Wert von Wertpapieren) mit ihrem Nominalwert übereinstimmt. Besteht **Uebereinstimmung zwischen Nominal- und Courswert,** gilt also ein Wertpapier zu nominell hundert auch nach dem Course gerade hundert, so heißt es, das Papier stehe **al pari.**

Steht der Cours **über oder unter dem Nominalwert,** so sagt man: das Papier steht **über oder unter pari.**

Der Cours oder Verkaufswert der Wertpapiere wird fast täglich durch die größeren Zeitungen veröffentlicht und der Cours durch die Summe bezeichnet, welche für je 100 *M.* Nominalwert bezahlt wird.

Daß die Verzinsung eines Wertpapieres von dessen Courswert gänzlich unabhängig ist und sich nur nach dem Nominalwerte bestimmt, dagegen aber je nach der Höhe oder Niedrigkeit des Zinsfußes vom bedeutendsten Einfluße auf die Gestaltung des Courses ist, ist selbstverständlich.

Beispiel.

Zu welchem Cours muß man $3\frac{1}{2}$ % Obligationen kaufen, wenn das hiezu verwendete Geld $4\frac{1}{2}$ % abwerfen soll?

1. Lösung nach Proportion.

Bedingungssatz: $4\frac{1}{2}$ *M.* Zins tragen 100 *M.* Kapital

Fragesatz: $3\frac{1}{2}$ „ „ „ x „ „

$4\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2} = 100 : x$

$$x = \frac{100 \cdot 3\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} = \frac{100 \cdot 7 \cdot \overset{1}{2}}{9 \cdot \underset{1}{2}} = 77\tfrac{7}{9}\ \mathcal{M}$$

Zum Cours (Kurs) von $77\frac{7}{9}$ muß man $3\frac{1}{2}\,\%$ Obligationen kaufen, wenn das hiezu verwendete Geld $4\frac{1}{2}\,\%$ abwerfen soll.

2. Lösung durch Schluß.

$4\frac{1}{2}$ ℳ Zins tragen 100 ℳ Kapital

1 " " " $\frac{100}{4\frac{1}{2}}$ " "

$3\frac{1}{2}$ " " " $\frac{100 \cdot 3\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}$ " "

$$\frac{100 \cdot 3\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} = \frac{100 \cdot 7 \cdot \overset{1}{2}}{9 \cdot \underset{1}{2}} = 77\tfrac{7}{9}\ \mathcal{M}$$

Zum Cours (Kurs) von $77\frac{7}{9}$ muß man die Obligationen kaufen.

Aufgaben.

1) Welchen Wert haben 800 ℳ in $4\,\%$ Aktien am 1. April zum Cours 92 mit dem am 1. Juli fälligen halbjährigen Coupons?
2) Wie viel gelten am 1. Juni 3000 ℳ in $5\,\%$ Papieren zum Cours 95 ohne die am 1. Juli fälligen halbjährigen Coupons?
3) 600 ℳ Staatspapiere zum Cours 105 gelten mit den am 1. Juli fälligen, halbjährigen Coupons im ganzen $634\frac{1}{2}$ ℳ. Zu wie viel % stehen die Papiere?
4) Wenn $3\frac{1}{2}\,\%$ Staatspapiere den Cours von $89\frac{1}{2}$ haben, welches ist der entsprechende Cours von $2\frac{1}{2}\,\%$?
5) Jemand will sein aus 87220 ℳ bestehendes Vermögen in Staatspapieren anlegen, ist aber im Zweifel, ob er $4\,\%$ Obligationen im Cours zu 98 oder $3\frac{1}{2}\,\%$ zu 89 kaufen soll. Welches von beiden Papieren hat er zu nehmen, wenn er auf den höheren Zinsfuß abhebt und wie viel beträgt in diesem Falle der jährliche Ueberschuß an Zinsen?
6) Was kosten 20 Stück Mailänder 10 frs Loose zum Cours 9,30?
7) Jemand kauft 10 Stück Eisenbahnaktien à 100 ℳ Nennwert zum Cours $85\frac{1}{2}$ und zu einer Zeit, als erst $45\,\%$ eingezahlt sind. Wie viel hat er dafür zu zahlen?
8) Zu welchem Course muß man $4\,\%$ Pfandbriefe ankaufen, um sein Geld darin zu $4\frac{1}{2}\,\%$ anzulegen?

9) Es kauft Jemand am 21. Juli 6400 M. in $4\frac{1}{2}$ % Staatspapieren zum Cours $96\frac{3}{4}$ mit den dazu halbjährigen Coupons, welche am 1. Oktober fällig sind. Was hat er zu bezahlen?

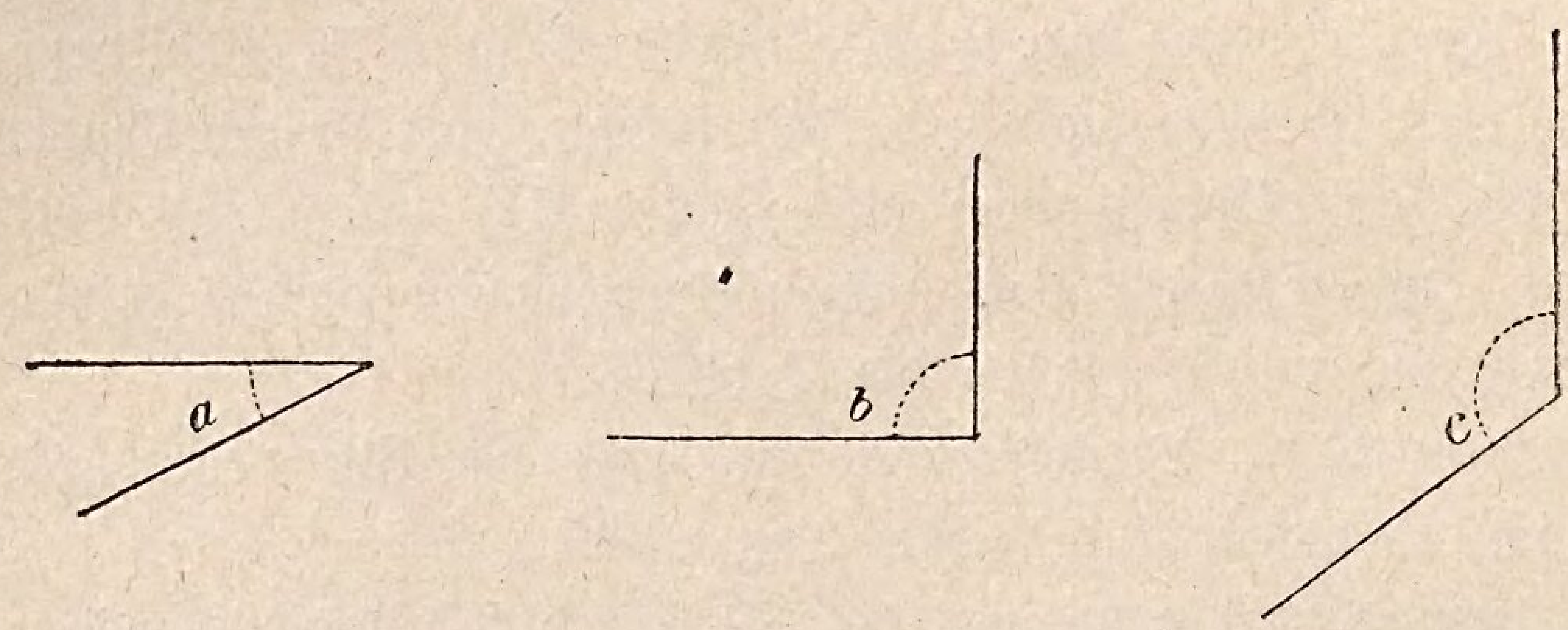
11. Flächen- und Körperberechnungen.

a) Flächenberechnung.

Die **Gerade** besteht aus einer Reihe von Punkten, die in derselben Richtung aufeinanderfolgen. Eine Reihe aufeinanderfolgender Punkte heißt auch **Linie.** Man unterscheidet **gerade, krumme, gebrochene** und **gemischte Linien.** Die Linie (Gerade) ist die Grenze der Fläche. **Die Fläche** hat **zwei Ausdehnungen nämlich Länge und Breite (Höhe).** Wir unterscheiden **geradlinig und krummlinig begrenzte Flächen,** je nachdem die Grenzen gerade oder krumme Linien sind.

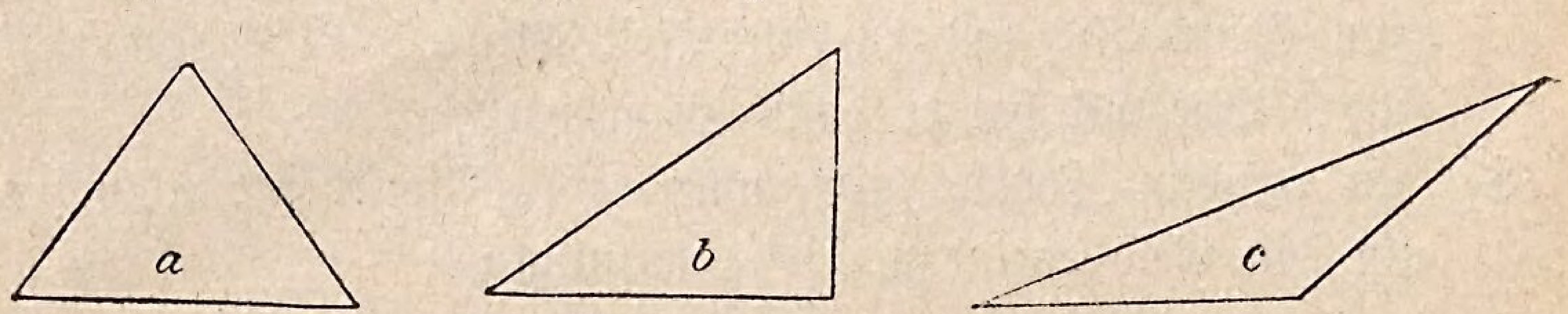
Von den **geradlinig begrenzten Flächen** betrachten wir das **Dreieck,** das **Viereck** 2c.; von den **krummlinig begrenzten** den **Kreis.**

Je nachdem eine Fläche von **drei, vier** oder **fünf** 2c. Linien begrenzt ist, nennen wir sie **Dreieck, Viereck, Fünfeck** u. s. w. **Der Abstand zweier sich schneidender Linien heißt Winkel.** Man unterscheidet a) **spitze,** b) **rechte** und c) **stumpfe Winkel.**

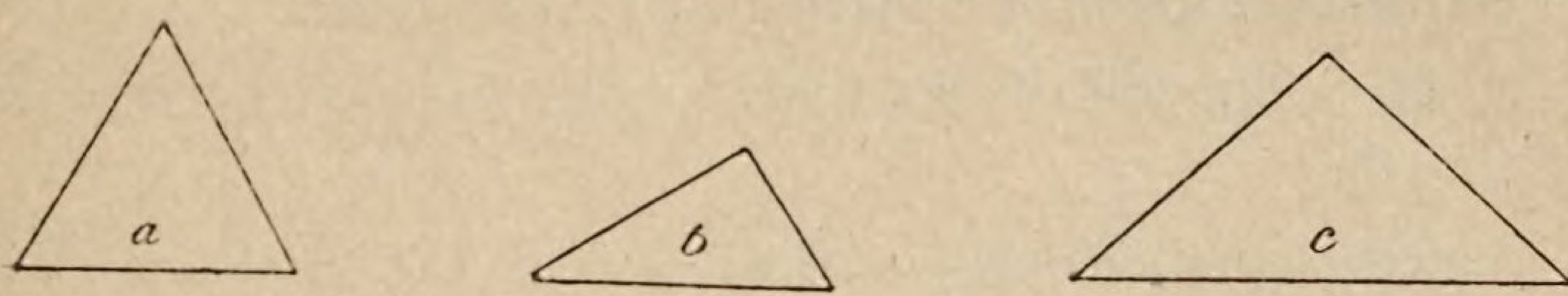


Spitz nennt man einen Winkel, der kleiner ist als 90° (Grad), ein **rechter Winkel** enthält 90° und wird gebildet von 2 Linien, die aufeinander senkrecht stehen; ein **stumpfer Winkel** endlich ist derjenige, der mehr als 90° hat.

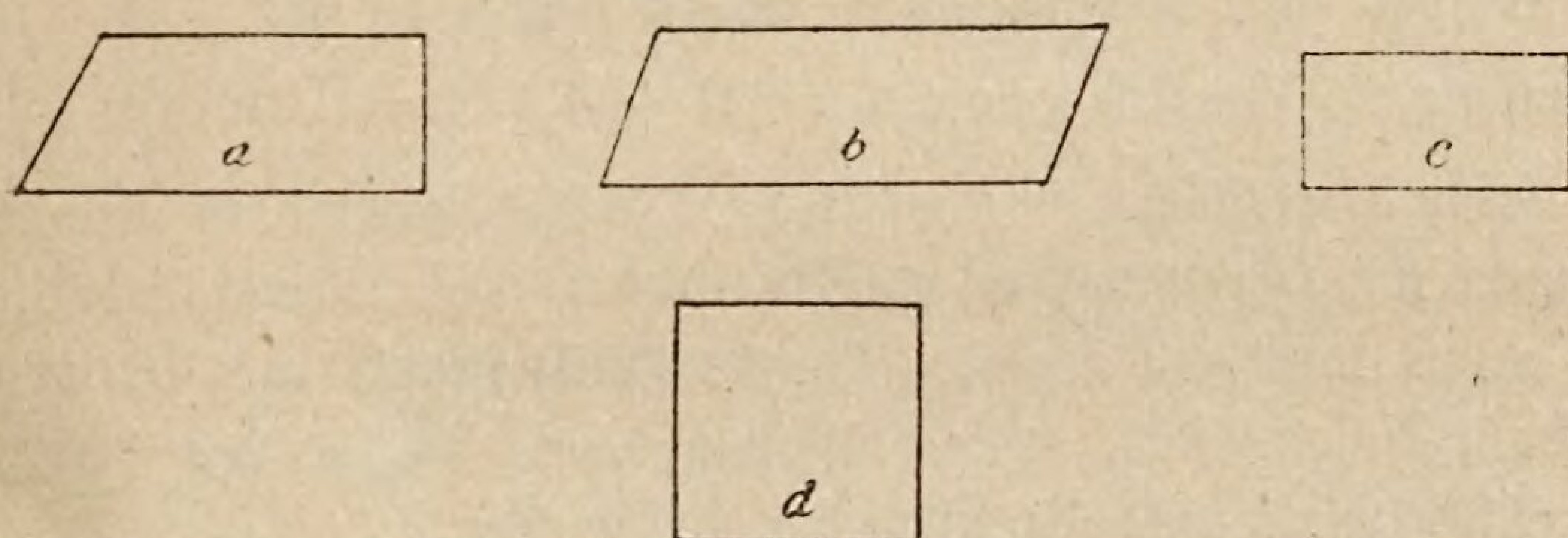
Je nachdem ein **Dreieck** lauter **spitze, einen rechten** oder **einen stumpfen Winkel** enthält, heißt es a) ein **spitzwinkeliges,** b) **rechtwinkeliges** oder c) **stumpfwinkeliges Dreieck.**



Je nachdem ferner ein **Dreieck gleiche Seiten** oder **ungleiche Seiten** hat, heißt es a) ein **gleichseitiges** oder b) **ungleichseitiges Dreieck.** Sind endlich in einem **Dreiecke zwei Seiten einander gleich,** so heißt dasselbe c) ein **gleichschenkliges Dreieck.**



Ein Viereck mit einem Paar gleichlaufender (paralleler) Seiten heißt a) **Trapez; ein Viereck mit je zwei parallelen Seiten** heißt b) ein **Parallelogramm. Hat dieses gleiche (rechte) Winkel,** so heißt es c) **Rechteck, sind überdieß auch die Seiten gleich,** d) **Quadrat.**



Jede Seite einer geradlinigen Figur kann als **Grundlinie (Basis)** betrachtet werden.

Unter **Höhe** versteht man beim Dreiecke die Entfernung der Grundlinie von dem gegenüberliegenden Ecke und beim Parallelogramm von der gegenüberliegenden Seite. Am Quadrat und Rechteck kann man je zwei in einem Ecke zusammenstossende Seiten als **Grundlinie** und **Höhe, Länge** und **Breite** betrachten.

Bei Berechnung einer Fläche kommen 2 Fragen in Betracht.

1) Wie groß ist der Umfang der Fläche?
2) Wie groß ist der Inhalt derselben?

ad 1. Der Umfang (Perimeter) einer Fläche ist gleich der Summe der begrenzenden Seiten (Linien).

Z. B. Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen Seiten 3 m, 6 m und 5 m lang sind?

Umfang des Dreieckes $= 3$ m $+ 6$ m $+ 5$ m $= 14$ m

Wie groß ist der Umfang eines Viereckes, dessen Seiten 7 m, 5 m, 9 m und 4 m lang sind?

Umfang des Viereckes = 7 m + 5 m + 9 m + 4 m = 25 m.

Der Umfang eines Quadrates ist gleich der Summe aller vier Seiten oder gleich der vierfachen Quadratseite.

Z. B. Wie groß ist der Umfang eines Quadrates, dessen Seite 6 m lang ist?

Umfang des Quadrates = 6 m + 6 m + 6 m 6 m = 24 m.

oder

Umfang des Quadrates = 4 . 6 m = 24 m.

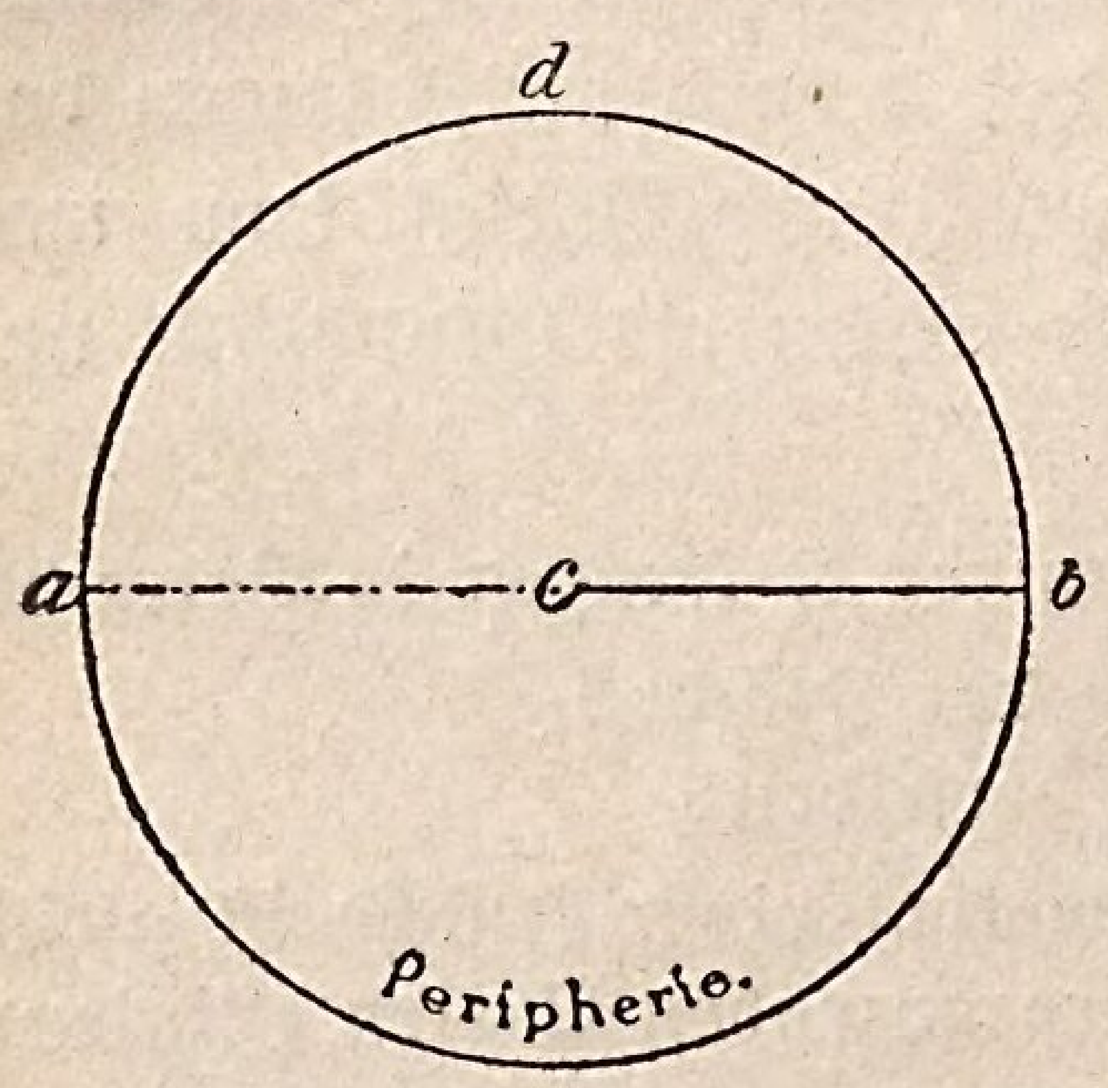
Der Umfang des Rechteckes (Parallelogrammes) ist gleich der doppelten Summe zweier anstossender Seiten.

Z. B. Wie groß ist der Umfang eines Parallelogrammes, dessen eine Seite 6 m und dessen andere Seite 4 m lang ist?

Umfang des Parallelogrammes = (6 + 4) . 2 = 10 m . 2 = 20 m

Eine Kreisfläche ist eine Fläche, welche begrenzt ist von einer krummen Linie (**Kreisumfang** oder **Peripherie**), deren sämmtliche Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte (**Mittelpunkt** oder **Centrum**) gleichweit entfernt sind. Die Entfernung eines Punktes der Peripherie vom Mittelpunkt heißt **Radius** oder **Halbmesser.**

Verlängert man einen Radius über das Centrum hinaus bis zur Peripherie, so erhält man einen **Durchmesser.** Der **Durchmesser ist demnach gleich dem doppelten Radius.**



Linie b C = Radius

Linie a b = Durchmesser

C = Centrum oder Mittelpunkt

b d a b = Peripherie oder Umfang des Kreises.

Den Umfang oder die Peripherie eines Kreises findet man, wenn man den Durchmesser 3,14 (der sogenannten Ludolphine) multipliciert.

Z. B. Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Radius 7 m hat?

Umfang des Kreises = Durchmesser . 3,14

Durchmesser = 2 . Radius

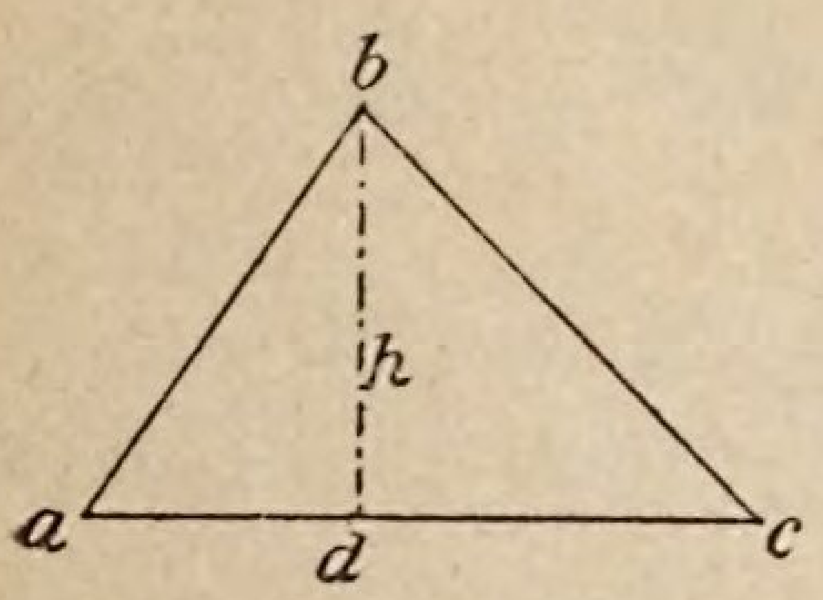
folglich

Umfang des Kreises = 2 . 7 . 3,14 = 43,96 m.

Anm. Abkürzungen. r = Radius oder Halbmesser.
d = Durchmesser.
c = Centrum oder Mittelpunkt.
P = Peripherie oder Umfang.

ad 2. **Den Inhalt einer Fläche** findet man auf folgende Weise:

1. Dreieck.



Der Inhalt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multipliciert und das Produkt durch 2 dividiert.

Wenn also g = Grundlinie, h = Höhe und F = Flächeninhalt ist, so lautet die Formel:

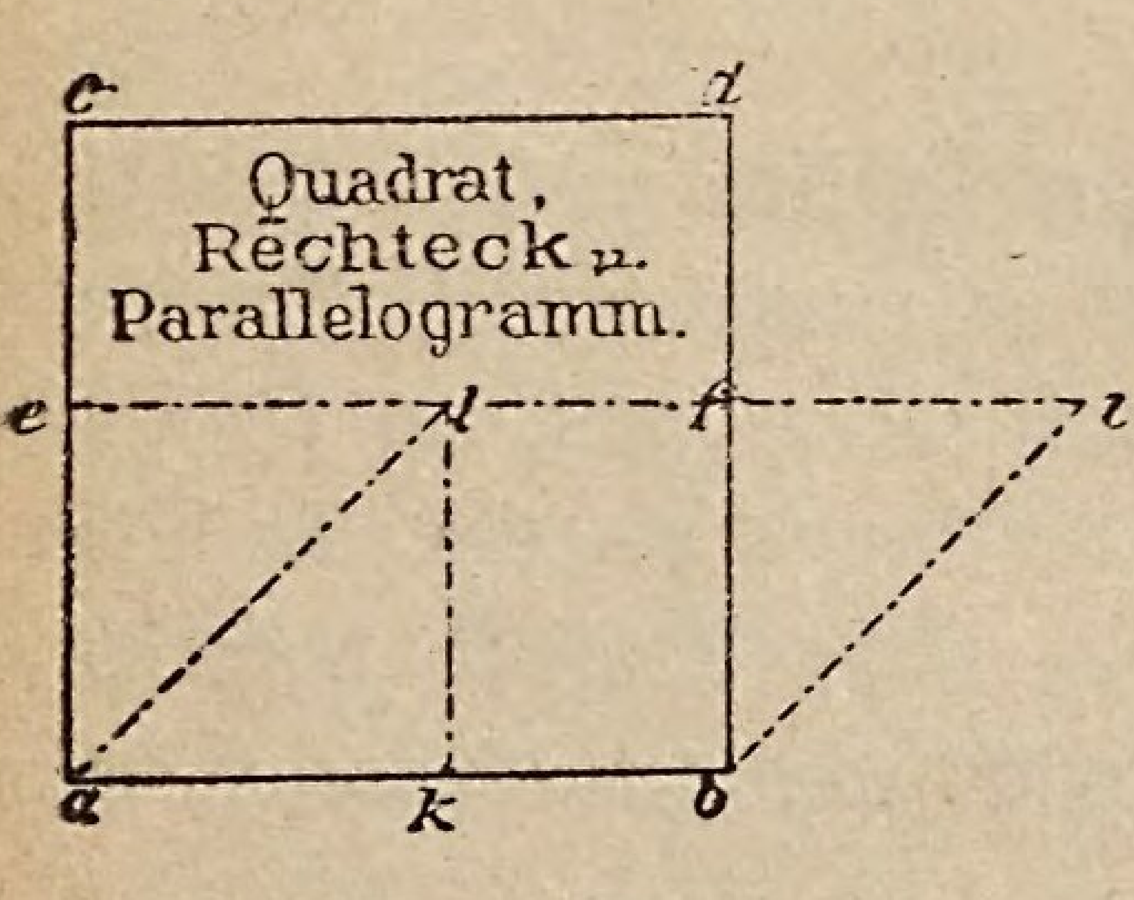
$$F = \frac{g \cdot h}{2}$$

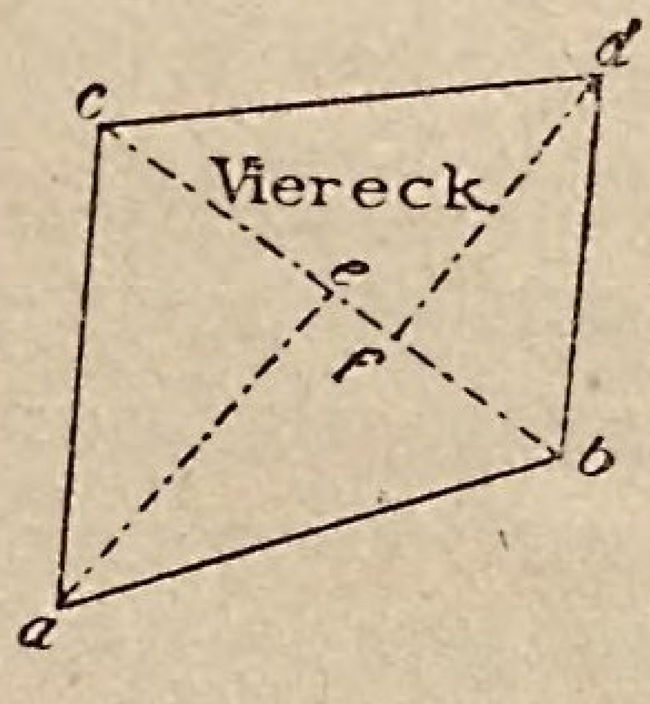
Z. B. Welches ist der Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie 6 m und dessen Höhe 5 m ist?

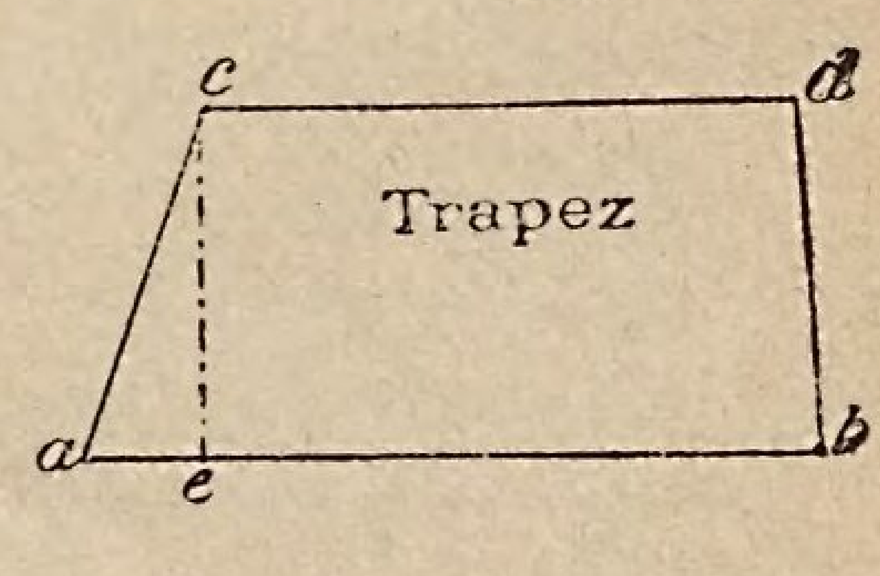
$$F = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ m}$$

2. Viereck.

Der Inhalt eines Quadrates, eines Rechteckes oder eines Parallelogrammes wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multipliciert. Der Inhalt eines Vierecks überhaupt wird gefunden, wenn man das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, folglich ist der **Inhalt eines Vierecks gleich der Summe zweier Dreiecke.** Der Inhalt eines Trapezes ist analog gleich dem Produkte aus der Summe der beiden parallelen Seiten und deren halben Abstande (Höhe).







Also Quadrat a b c d $= ab \cdot ac\ (g \cdot h) = ab \cdot ab = \overline{ab}^2$
Rechteck a b e f $= ab \cdot ae\ (g \cdot h)$
Parallelogramm a b l i $= ab \cdot kl\ (g \cdot h)$
Viereck a b c d $= \frac{bc \cdot ae}{2} + \frac{bc \cdot df}{2} = \frac{bc}{2} \cdot (ae + df)$

Trapez a b c d $= \frac{ce}{2} \cdot (ab + cd)$.

Beispiele.

Wie groß ist der Inhalt eines Quadrates, dessen Seite 10,5 m ist?

$$F = 10{,}5 \cdot 10{,}5\ (qm) = 110{,}25\ qm$$

Welchen Flächeninhalt hat eine Thüre (Rechteck), welche 2 m hoch und $1\frac{1}{4}$ m breit ist?

$$F = 2 \cdot 1\tfrac{1}{4}\ (qm) = \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{5}{4} = \tfrac{10}{4} = 2\tfrac{1}{2} = 2{,}5\ qm.$$

Welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm von 17,6 m Grundlinie und 15,3 m Höhe?

$$F = 17{,}6 \cdot 15{,}3 = 269{,}28\ qm.$$

Es sei der Inhalt eines Viereckes nach der obigen Figur zu berechnen. Man teilt das Viereck a b c d in 2 Dreiecke durch die gerade b c, die man zugleich als gemeinsame Grundlinie der beiden Dreiecke betrachtet.

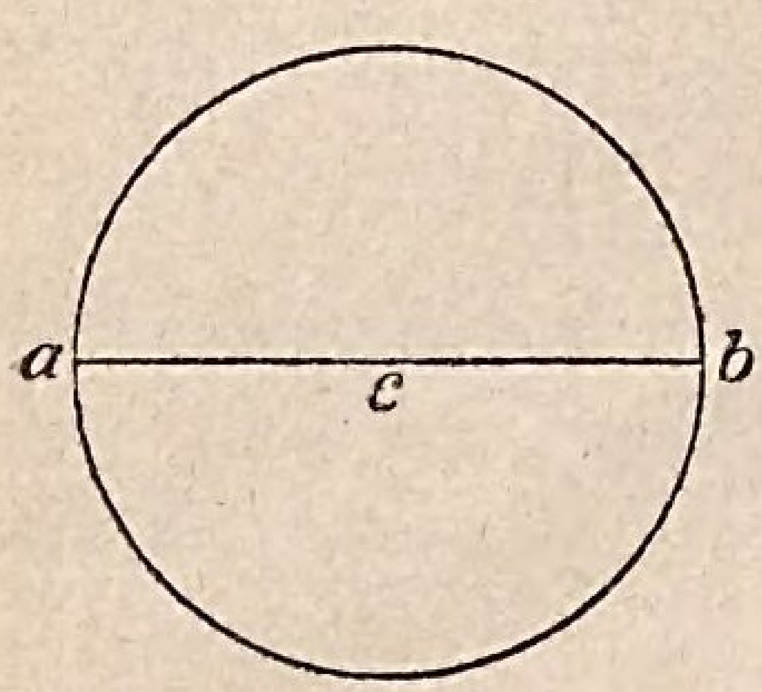
b c sei nun 10,5 m lang; von den beiden gegenüberliegenden Ecken d und a sei die Grundlinie und zwar von d 4,5 m, von a 6,7 m entfernt, folglich

$$F = \frac{10{,}5 \cdot 4{,}5}{2} + \frac{10{,}5 \cdot 6{,}7}{2} = \frac{10{,}5}{2}(4{,}5 + 6{,}7) = 5{,}25 \cdot 11{,}2 = 58{,}8\,qm.$$

Die größere Parallele eines Trapezes ist 97,5 m, die kleinere 38 m und die Höhe desselben 14 m; wie groß ist sein Inhalt?

$$F = \frac{14}{2}(97{,}5 + 38) = 7 \cdot 135{,}5 = 948{,}5\ qm.$$

3. Kreis.



Um den **Inhalt eines Kreises** zu finden, denkt man sich den Kreis in unendlich viele Dreiecke zerlegt und zwar vom Mittelpunkt des Kreises aus. Die Summe der Grundlinie dieser Dreiecke ist gleich der Peripherie des Kreises, während der Radius des Kreises die gemeinsame Höhe

der Dreiecke ist; **also ist der Inhalt des Kreises gleich der Peripherie multipliciert mit dem halben Radius.**

Die Peripherie ist gleich 2 . r . 3,14; folglich

$$F = r \cdot r \cdot 3{,}14 = r^2 \cdot 3{,}14$$

Beispiel.

Welchen Flächeninhalt hat ein runder Tisch, dessen Durchmesser 78 cm hat?

$$\text{Radius} = \frac{78}{2} = 39 \text{ cm}$$

$$F = 39 \cdot 39 \cdot 3{,}14 = 4775{,}94 \text{ qcm.}$$

Anm. Wenn der Flächeninhalt bekannt ist und daraus eine Seite bestimmt werden soll, so geschieht dies durch Division mit den übrigen bekannten Teilen in den Flächeninhalt.

Aufgaben.

1) Der dreieckige Giebel eines Hauses 15 m breit und $10\frac{1}{2}$ m hoch, soll geweißt werden; wie viele Quadratmeter werden gestrichen?

2) In einer Ecke, welche zwei Wege bilden, liegt ein dreieckiges Getreidfeld von 124,5 m Grundlinie und 80,25 m Höhe; wie viel Ar und Quadratmeter umfaßt es?

3) Das Dach eines viereckigen Thurmes bildet Dreiecke 10,5 m breit und 8,2 m hoch; es wird mit Schieferplatten gedeckt, welche 25 cm lang und 20 cm breit sind; wie viele Platten sind erforderlich und wie viel kostet die Bedachung, wenn 1 qm mit 25 *M.* berechnet wird?

4) Der Bretterverschlag eines Treppenaufganges hat die Gestalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie 4,5 m, dessen Höhe 6,4 m beträgt. Derselbe soll mit Oelfarbe gestrichen werden. Es werden pro Quadratmeter 0,75 Mark berechnet. Wie viel Mark kostet das Streichen des Verschlages?

5) Ein Dreieck hat einen Umfang von 2,31 m; die eine Seite desselben beträgt 0,847 m, die andere 0,698 m; wie groß ist die dritte Seite?

6) Wie groß ist der Umfang a) eines gleichseitigen Dreiecks, b) eines gleichseitigen Zwölfeckes, dessen Seite 1 dm 5 cm lang ist?

7) Eine Wiese hat die Gestalt eines Dreieckes von 120 m Grundlinie und 280 m Höhe. Der Durchschnittsertrag derselben ist

pro Quadratmeter 0,6 ℔ Heu. a) Wie viel Heu wird auf der Wiese geerntet? b) Welches ist der Reinertrag der Wiese, wenn der Ctr Heu 1,5 Mark kostet und die Bearbeitungskosten 15 Mark betragen?

8) Wie viel Band braucht man, um eine quadratische Decke von 2,5 Seitenlänge mit Band einfassen zu können? Wie teuer kommt dies, wenn 1 m 26 ₰ kostet?

9) Eine quadratische Wiese von $77\frac{1}{2}$ m Seitenlänge soll an den Rändern mit Bäumen bepflanzt werden, 2,5 m von einander entfernt; wie viel Bäume sind erforderlich?

10) Ein quadratisches Zimmer von 6,25 m Seitenlänge wird gedielt; wie viel Quadratmeter Dielen braucht man?

11) Welchen Wert hat ein quadratischer Bauplatz von 42 m Seitenlänge, wenn 1 qm $16\frac{1}{2}$ Mark kostet?

12) Ein Bauplatz ist 39,9 m lang und 30,8 m breit und hat die Form eines rechtwinkeligen Dreieckes. Darauf wird ein Haus von 15 m Frontlänge und 10,5 m Tiefe gebaut. Wie viel Raum bleibt für Hof und Stallung übrig?

13) Das Dach eines Hauses ist 12,4 m lang und 7,5 m breit. Was kostet das Eindecken mit Kupfer, wenn für 1 qm 3,35 *M.* bezahlt werden?

14) Der Bauplatz für einen Circus hat die Form eines Kreises. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Kreises, wenn der Durchmesser 20,5 m beträgt? Wie viel Zuschauer haben Platz, wenn auf die Person 2 qm gerechnet werden und der Spielraum eine Kreisfläche mit dem Durchmesser 7,5 m einnimmt?

15) Welches ist die Höhe eines Trapezes, das 476,34 qm Inhalt hat und dessen zwei parallele Seiten 7 m und 5 m lang sind?

b) Körperberechnung.

Unter Körper versteht man die Ausdehnung nach 3 Richtungen. Die Seiten eines Körpers sind Flächen, die Linien, nach welchen sich zwei Seitenflächen schneiden, heißen Kanten, die Schnittpunkte dreier oder mehrerer Seitenflächen heißen die Ecken des Körpers.

Je nach der Beschaffenheit und Lage der begrenzenden Flächen nennt man einen Körper a) Würfel, b) Prisma, c) Cylinder, d) Pyramide, e) Kegel, f) Kugel.

a) Der Würfel ist ein Körper, dessen Seitenflächen gleiche Quadrate sind, die auf einander senkrecht stehen.

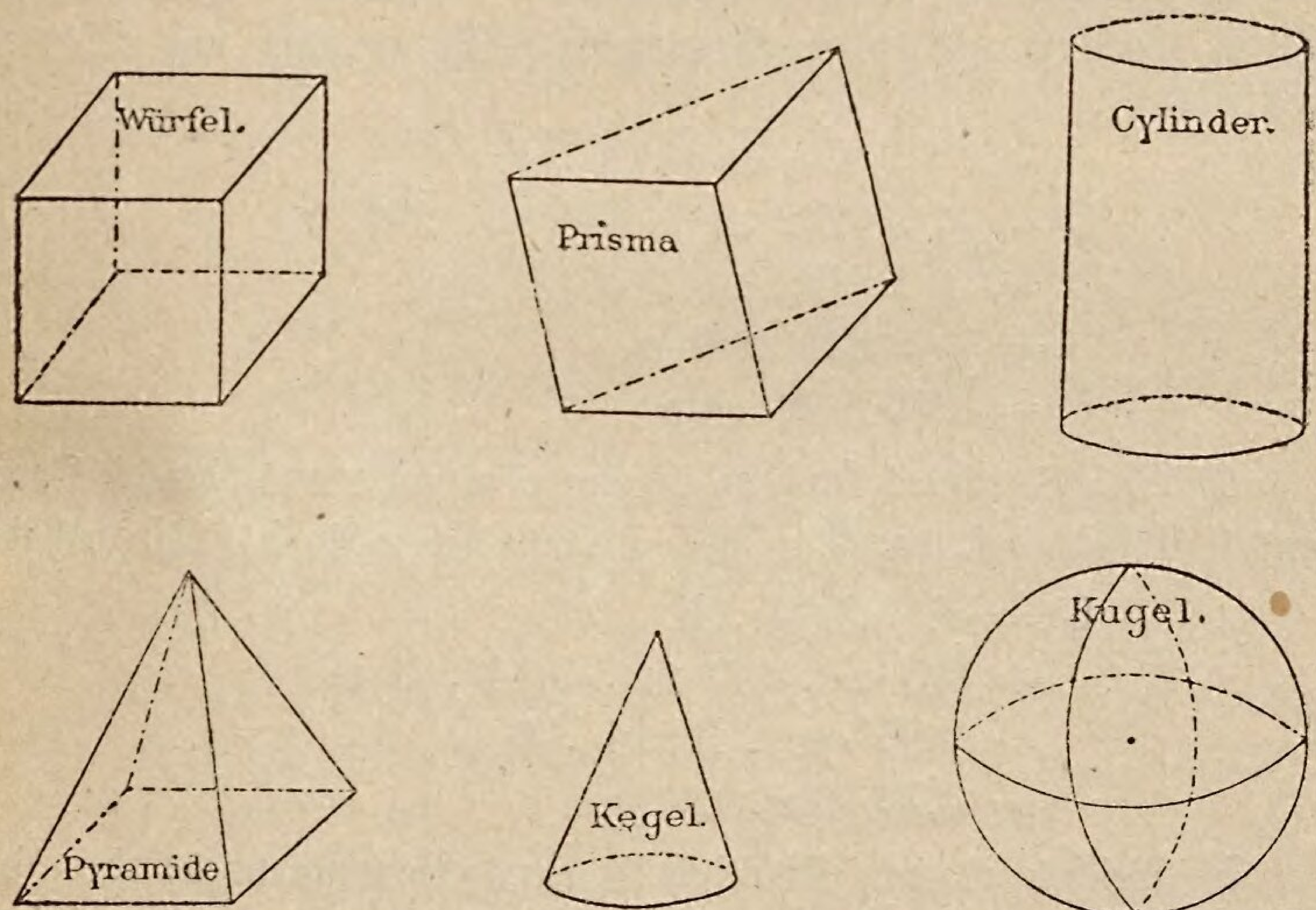
b) Das Prisma ist ein Körper, in dem je zwei gegenüberliegende Seitenflächen parallel sind.

c) Der Cylinder (Walze) ist ein Körper (Prisma), dessen Grundfläche und gegenüberliegende Deckfläche Kreise sind.

d) Die Pyramide ist ein Körper, dessen Seitenflächen sich in einem der Grundfläche gegenüberliegenden Punkte (Spitze) schneiden.

e) Der Kegel ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist.

f) Die Kugel ist ein Körper, dessen Oberfläche die Eigenschaft hat, daß alle ihre Punkte von einem innerhalb gelegenen Punkte (Mittelpunkt, Centrum) gleichweit entfernt sind.



Der Umfang (Oberfläche) eines Körpers ist gleich der Summe der begrenzenden Flächen.

Der **Kubikinhalt** der Körper wird nach folgenden Beispielen berechnet:

C = Kubikinhalt
F = Grundfläche (Länge und Breite)
l = Länge
b = Breite
h = Höhe
r = Radius.

1) Welches ist der Kubikinhalt eines Würfels, der 0,5 m hoch ist?

$$C = l \,.\, b \,.\, h.$$

$$C = 0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m$$
$$= 0{,}25\ qm \,.\, 0{,}5\ m$$
$$= 0{,}125\ cbm.$$

2) Welches ist der Kubikinhalt eines Prismas, das 1,5 m hoch ist und dessen Grundfläche 2,2 m lang und 1,8 m breit ist?

$$C = l \,.\, b \,.\, h.$$

$$C = 1{,}5\ m \,.\, 2{,}2\ m \,.\, 1{,}8\ m$$
$$= 3{,}3\ qm \,.\, 1{,}8\ m$$
$$= 5{,}94\ cbm.$$

3) Welches ist der Kubikinhalt einer vierseitigen Pyramide, die 132 m hoch ist und deren Grundfläche 250 m lang und 250 m breit ist?

$$C = \tfrac{1}{3} \,.\, h \,.\, F.$$

$$C = \tfrac{1}{3} \,.\, (132\ m \,.\, 250\ m \,.\, 250\ m)$$
$$= \tfrac{1}{3} \,.\, (132\ m \,.\, 62500\ qm)$$
$$= \tfrac{1}{3} \,.\, 8250000\ cbm$$
$$= 2750000\ cbm$$

4) Welches ist der Kubikinhalt eines Baumstammes, der die Form eines Cylinders hat, der 6 m hoch ist und dessen Radius 0,5 m hat?

$$C = r^2 \,.\, 3{,}14 \,.\, h$$
$$= 0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m \,.\, 3{,}14 \,.\, 6\ m$$
$$= 0{,}25\ qm \,.\, 3{,}\ 14 \,.\, 6\ m$$
$$= 4{,}71\ cbm.$$

5) Welches ist der Kubikinhalt eines Baumstammes, der die Form eines abgestumpften Kegels hat, der 6 m hoch, dessen kleiner Radius 0,2 m und dessen großer Radius 0,5 m beträgt? *)

$$C = \tfrac{1}{3} \,.\, h \,.\, 3{,}14 \,.\, (R^2 + r^2 + R \,.\, r)$$

$$C = \tfrac{1}{3} \,.\, 6\ m \,.\, 3{,}14 \,.\, (0{,}5\ m \,.\, 0{,}5\ m + 0{,}2\ m \,.\, 0{,}2\ m + 0{,}5\ m \,.\, 0{,}2\ m)$$
$$= 6{,}28\ m \,.\, (0{,}25\ qm + 0{,}04\ qm + 0{,}1\ qm)$$
$$= 6{,}28\ m \,.\, 0{,}39\ qm$$
$$= 2{,}4492\ cbm.$$

---

*) R = Radius der großen Kreisfläche des abgestumpften Kegels.
r = Radius der kleinen Kreisfläche desselben.

6) **Der Inhalt einer Kugel** ist

$\frac{4}{3}$ r³ . 3,14.

Welches ist der Kubikinhalt der Erde, wenn man als die Länge des Durchmessers 1720 Meilen annimmt?

$C = \frac{4}{3} \,.\, 860 \,.\, 860 \,.\, 860 \,.\, 3{,}14 = 2662954453\frac{1}{3}$ cbm.

(Die Oberfläche der Kugel ist gleich $4 \,.\, r^2 \,.\, 3{,}14$ oder $d^2 \,.\, 3{,}14$.)*)

Anm. Sowohl bei der Flächen- als Körperberechnung ist die Entwicklung der Formeln für die Berechnung der einzelnen Seiten dem Unterrichte vorbehalten. Ueberhaupt ist dieser Abschnitt nur für jene Schüler berechnet, welche später nicht mehr Gelegenheit haben, sich eingehender mit Planimetrie und Stereometrie zu beschäftigen.

Aufgaben.

1) Wie groß ist der Kubikinhalt eines Kastens, der 15 dm lang, 9 dm breit und 8 dm hoch ist?
2) Wie viele cdm Sand faßt ein Karren, der im Innern 1 m 4 dm lang, 5 dm 8 cm breit und 5 dm hoch ist?
3) Was kostet ein viereckig behauener Eichenstamm, der 4 m 4 dm lang, 5 dm breit und 5 dm dick ist, wenn 1 cbm 70 Mark kostet?
4) Eine Mauer hält 8 cbm; wie dick ist sie, wenn die Länge 8 m und die Höhe 2 m beträgt?
5) Wie viele Ster (cbm) Brennholz gibt ein Baumstamm (Cylinderform), welcher 10 m 4 dm lang ist und der einen Durchmesser von 3 dm 4 cm hat?
6) Wie viele Liter (cdm) Getreide faßt ein Gefäß in der Form eines abgestumpften Kegels, das 1 m hoch, dessen kleiner Radius 2 dm und dessen großer Radius 5 dm beträgt?
7) Wie viel Wasser geht in eine hohle Glaskugel, welche einen Durchmesser von 2 dm hat?
8) Wie viele Liter Bier werden während eines Winters in einer Bräupfanne produciert, welche die Form eines abgestumpften Kegels hat und 8 dm hoch ist und dessen R = 5 m und r = 3 m beträgt, wenn 25 mal gesotten wird?
9) Welches ist der Kubikinhalt einer vierseitigen Pyramide, welche 110 m lang und ebenso breit und 125 m hoch ist?

*) d = Durchmesser.

10) Ein fünfseitiger aus Ziegelsteinen gemauerter Pfeiler hat eine Grundfläche von 6250 qcm. Derselbe steht 78 cm in und 2,44 m über der Erde. Wie viel Ziegelsteine waren hiezu erforderlich, wenn auf 1 cbm 512 Steine gehen?

11) Ein Zuckerhut ist 42 cm hoch und seine Grundfläche hat einen Durchmesser von 24 cm. Wie viel ccm enthält er?

12) Der Durchmesser einer Kegelkugel beträgt 13 cm. Wie groß ist deren Umfang und Inhalt?

13) Der Durchmesser des Mondes beträgt ungefähr 3525 km. Wie groß ist seine Oberfläche und wie groß der Kubikinhalt?

14) Zur Pflasterung einer Straße soll ein Haufen Steine herbeigefahren werden. Der Steinhaufen ist 8 m lang, 3,5 m breit und 1,5 m hoch. Wenn ein Fuhrmann jedesmal 1,5 cbm auf seinen Wagen ladet, wie oft hat er zu fahren?

15) Eine Straße, die 8 km 647 m lang und 4 m breit ist, soll 9 cm hoch mit Kies überfahren werden; 1 cbm Kies kostet mit Fuhrlohn 2,2 *M.* Wie hoch kommt die ganze Arbeit?

c) Gewichtsberechnung der Körper.

Unter dem specifischen Gewichte eines Körpers versteht man diejenige Zahl, welche anzeigt, wie vielmal ein Körper schwerer (leichter) ist als ein gleich großes Volumen (gleich großer Rauminhalt) destilliertes Wasser bei 4° Celsius.*)

Das specifische Gewicht des Wassers = 1

$$G = V \,.\, s \quad \text{d. h.}$$

Man findet das wirkliche Gewicht eines Körpers in Kilogramm ausgedrückt, wenn man seinen in Kubikdecimetern ausgedrückten Inhalt mit dem specifischen Gewicht seiner Masse multipliciert.)**

---

*) V = Kubikinhalt (Volumen)
G = wirkliches Gewicht.
s = specifisches Gewicht.

**) Der Inhalt muß in Kubikdecimetern ausgedrückt sein, weil 1 cdm destillierten Wassers bei 4° Celsius 1 kg wiegt.

Z. B. Eine rechteckige Eisenstange ist 1 m 5 dm lang und 5 cm breit, 5 cm dick, das specifische Gewicht des Eisens ist 7,8. Wie schwer ist die Eisenstange?

$$G = 15 \,.\, 0{,}8 \,.\, 0{,}5 \,.\, 7{,}8 \text{ (kg)}$$
$$= 12 \,.\, 0{,}5 \,.\, 7{,}8 \text{ kg} = 6 \,.\, 7{,}8 \text{ kg} = 46{,}8 \text{ kg.}$$ wiegt die Eisenstange.

$$V = \frac{G}{s}$$ d. h.

Man findet den körperlichen Inhalt in Kubikdecimetern ausgedrückt, wenn man das durch kg ausgedrückte wirkliche Gewicht durch das specifische Gewicht dividiert.

Z. B. Eine Bleikugel wiegt 2,27 kg. Das specifische Gewicht des Bleies ist 11,35. Welches ist der Kubikinhalt der Kugel?

$$V = \frac{G}{s} = 2{,}27 : 11{,}35$$
$$= 227 : 1135 = 0{,}2 \text{ cdm}$$ ist der Kubikinhalt der Kugel.
2270
0

Aufgaben.

1) Welches ist der Inhalt und das Gewicht einer quadratischen Pyramide aus Bronce vom specifischen Gewichte 8,58, welche eine Grundkante von 2 dm 5 cm und eine Höhe von 1 m 4 dm hat?
2) Was wiegt ein Würfel aus Kupfer (spec. Gew. 8,78) mit einer Kante von 3,45 m?
3) Wie schwer ist ein senkrechtes quadratisches Prisma aus Marmor (spec. Gew. 2,84), dessen Grundkante 1,3 m und dessen Höhe 8,6 m ist?
4) Was wiegt ein rechtwinkelig behauener Sandstein (spec. Gew. 2,43) von 5,6 m Länge, 4,75 m Breite und 8,34 m Höhe?
5) Welches ist das Gewicht eines Mühlsteines (Cylinder) (s = 2,5) mit einem Durchmesser von 1,5 m und einer Höhe von 0,29 m?
6) Wie viel gr wiegt eine Münze (Cylinder) aus Silber (s = 10,25) mit einem Durchmesser von 4,2 cm und einer Dicke von 5 mm?
7) Welches ist der Kubikinhalt einer Kugel aus Eisen (s = 7,25), welche 21 kg 75 g wiegt?

8) Welches Gewicht hat eine Kugel aus Glas (s = 2,73) bei einem Durchmesser von 5,48 dm?

9) Welches ist der Kubikinhalt eines Würfels aus Gold, der 96,29 g wiegt? (s = 19,258.)

10) Wie groß ist der Luftdruck auf 1 qm an der Meeresfläche, wo die Barometerhöhe durchschnittlich 76 cm beträgt (spec. Gewicht des Quecksilbers 13,59)? Luftdruck = (100 . 100 . 76) . 13,59 g.

Ustrich, Friedrich

Lehrbuch der Arithmetik für Latein-, Real-, Bürger- und gewerbliche Fortbildungs-Schulen

München 1884